平成２８年度　　学 位 論 文

解析的特異点の福井ブロー解析不変量に現れる整数論的性質

兵 庫 教 育 大 学 大 学 院　　学 校 教 育 研 究 科
教育内容・方法開発専攻　　認識形成系教育コース
Ｍ　１　４　１　４　４　Ｈ　　石　　黒　　順　　也

目次

序文

研究の動機

筆者は、大学の学部は経済学部に所属しており、経済学を学ぶ上で必要な数学の知識は学習していたが、理学部で学ぶような純粋数学の知識はほとんど身についていなかった。そのため、大学院に進学するまで集合論を学習したことがなく、大学院の授業で初めてその基礎を学んだ。そして、集合論の問題演習をしていく中で、もっと簡単な解法がないかと考えるようになった。私の指導教員である小池敏司先生に伺い、ある種の集合論的等式に対し、実解析関数のブロー解析不変量を用いた解法があることを知った。特に、そこで興味深かったことは、上の集合論的等式が整数に関わるものであったことである。このことから筆者は、福井不変量は簡単に求めることのできる不変量でありながら、まだ知られていない初等整数論的性質が隠されているのではないかと思うようになり、いまだに発見されていない福井不変量の性質と、不変量としての優秀さに関心を持った。

筆者はもともと高校数学の教員志望であり、次年度から高校教員になることが決まっているが、高等学校で数学を学ぶ目的について改めて考えた。筆者は高等学校で数学を学習する目的は大学受験のためだけではなく、大学での学びや研究のための基礎学力を定着させることにあるのではないかと思い至った。そこで、大学への橋渡しとして、高等数学の授業内でも発展的なトピックとして取り上げることのできるような題材を探した。しかし、筆者は大学院で多くの講義を受講したが、大学で学ぶ分野は多岐にわたることから、そのすべての橋渡しを授業内で行っていくのは現実的ではない。筆者が本論文の研究テーマとして福井不変量を題材にすることに決めた理由の一つは、高等学校での学習の内容に生かすことのできそうな可能性があると考えたからである。なぜならば、福井不変量は初等整数論的性質を持つことから、近年高等学校で導入された初等整数論の単元の教材の問題作成などにおいて用いることが出来る

のではないかと考えたからである。

研究の内容

本論文では、数学研究の題材として福井不変量に現れる初等整数論的性質を取り上げ、その不変量に関する考察を通して、専門書には載っていないような詳しい証明をつけるとともに、自分自身で新しく見つけた性質も述べている。

福井不変量とは、3章で詳しく述べるが、埼玉大学理学部の福井敏純氏が導入した不変量であり、解析関数芽と任意の解析弧の合成関数の位数の集合を指す。また、福井不変量は特に2変数実解析的特異点を分類する上で大変便利な不変量であることが知られている。特異点の定義に関しては第1章を参照してほしい。一変数関数の局所特異点論とは，大雑把には関数の極値問題の精密化と捉えてよいが、究極的には関数の標準形を求めることである。この方法は多変数関数に一般化されるし、更に写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ にも一般化される。この特異点論のテーマの一つに特異点解消がある。代数幾何や解析学の問題は特異点があるために問題が非常に難解になるが、特異点は本論文の第2章で述べるブローアップと言う操作を繰り返すことにより解消することができる。それは、上手い座標変換を行えば単項式となる事を意味している。広中先生の仕事[5]により、多項式や解析関数には特異点解消が存在することが知られているが、特異点解消の存在定理により、多項式や解析関数の計算は、単項式という簡単な式の計算に還元される。

本論文では、主として2変数解析関数に対する福井不変量を研究対象とした。特異点論を扱う専門的な論文では、福井不変量を求めるための計算公式について簡単な証明は載っているが、詳しい証明はついておらず、初心者にとって理解が困難である。本論文では、そのような人たちにとっても理解しやすいように、より詳細な証明を与えている。また、福井不変量に現れる初等整数論的性質の中で、安定的区間状という性質を取り上げ、特に斉次多項式関数の福井不変量が安定的区間状となるための条件について研究した。その応用として、複素斉次多項式の福井不変量が安定的区間状にならないものとして知られている例[6]が、斉次多項式の例として最適なものであることを示した。更に、福井不変量の不変量としての優秀さを示すために、福井不変量を含む最小の半群と比較した。2つの解析関数芽が与えられたとき、それらの福井不変量が一致すれ

ばそれらを含む最小の半群も一致する。従って、比較する方法として、それらの解析関数芽の福井不変量の半群が一致するならば、それぞれの福井不変量も一致するかという主問題を提出した。もし、主問題が肯定的に示されれば、福井不変量を含む最小の半群のほうが代数的構造を持つ分、福井不変量よりも秀れた不変量ということになる。論文の後半では主問題における否定的な例が存在するか否かについて検証した。尚、本論文では、線形代数学と集合論の知識は既知のものとする。論文を執筆する際に線形代数学では [14]、集合論について [13],[16] を参考にした。

論文の構成

以下、論文の構成について述べる。

第1章「準備」では、第1節で論文を読み進めていくうえで必須の知識である、解析関数芽と特異点の概念の定義を述べる。一方、第2節では初等整数論に関する基本的な定理について論じる。特に、兵庫教育大学の修了生である安納秀佳さんの修士論文 [11] を参考に、いくつかの初等整数論的性質も取り上げている。

第2章「ブロー解析同値」では、実解析関数芽に対するブロー解析同値の概念を導入する。第1節では、平面でのブローアップの定義を与える。第2節では第1節で与えたブローアップを用いて、2変数実解析関数に対するブロー解析同値を定義する。

第3章「福井不変量」では、本論文の話題の中心となる福井不変量の定義を述べ、第2章で扱ったブロー解析同値の定義を基に福井不変量がブロー解析不変であることの証明を与える。次に、定義に基づいて、2変数ブリスコーン多項式の福井不変量の計算公式を与えている。また、福井不変量を計算する際に非常に有効な手法である特異点解消ツリーを紹介する。更に、それを用いた解析関数芽の簡約化を通した福井不変量の計算公式に対して、詳しい証明を与えた。章の最後には、研究の動機欄でも触れたように、その福井不変量の公式の応用例として、集合論に関する一つの命題に対して福井不変量を用いた形式的で容易な解法を与えた。

第4章「安定的区間状」では福井不変量に現れる整数論的性質である「安定的に周期的」と「安定的区間状」について述べる。第1節では、「安定的に周期的」の定義について述べ、福井不変量は常に安定的に周期的になることについて解説する。第2節では、まず複素関数の福井不変量で安定的区間状にならない例を紹介し、節の後半では、福井不変量が安

定的区間状となるための判定法を述べる。第３節では、第２節で与えた例が複素斉次多項式の福井不変量が安定的区間状にならない例として最適な例であることを証明する。

第５章「福井不変量を含む最小の半群」では、第１節で群と半群の定義を述べ、第２節以降では、福井不変量を含む最小の半群について考察し、福井不変量と福井不変量を含む最小の半群を比較し、どちらのほうがより秀れた不変量であるかを検証する。実際、福井不変量は異なるが、福井不変量を含む最小の半群は一致するような関数を構成する命題を定式化し、示した。この5.3節、5.4節と4.3節は本論文で一番オリジナルな部分である。

最後に、本研究を進めるにあたり、大学院入学当初からの３年間にわたる手厚い御指導をして頂いた、指導教員の小池敏司教授に心より御礼申し上げます。毎週のゼミや修士論文執筆過程においてなかなか理解の進まない私に懇切丁寧に御付き合い頂いたこと、そして研究以外の面でも教育実習や教員採用試験の準備等をはじめとして、数学に関することだけにとどまらず、多岐にわたる知識や御助言を与えて下さったことに深く感謝致します。特に３年生になってからは、毎日のように声を掛けて頂いたことで、修士論文執筆に対する不安が拭い去られていたように思います。

また、毎日のように院生室へ足を運んで頂き、激励・応援をして下さった小池敏司教授をはじめとして、学部・大学院の授業・講義等様々な面で御世話になった数学教室の先生方、特にTeXの扱い方を丁寧に指導して下さった濱中裕明教授、研究に関する重要なヒントを下さったL. Paunescu先生に深く感謝致します。

数学教室で出会った先輩・同輩・後輩の皆さんとは、数学について、数学教育について、教員について等をはじめとする様々なテーマについて深く話すことが出来ました。そのことで自分の未熟さを改めて確認することが出来たと共に、自分がどうあるべきかということについて考えるきっかけとすることが出来たことに感謝致します。

理数系教員養成特別プログラム受講生の皆さんとは、大学院における教員免許の取得という共通の目的を持った仲間として大変有意義な３年間を過ごせたと思います。大変な観察実習や教育実習等を乗り越えられたのも、皆さんとの協力の賜物だと思っております。

教員免許を大学院で取得する理数系教員養成特別プログラムを開講し、私に受講することを許可して下さった兵庫教育大学大学院の職員・教員・関係者の皆様にも大変感謝しております。

そして、私に研究するための部屋を用意してくださり、様々な場面で支援をしていただいた株式会社けやき代表取締役社長の森本幸弘氏に深謝の意を表します。

最後に、将来への不安を覚えながらも迷走する私に大学院への進学を許可し、日々支えてくださった父に心より御礼申し上げます。

平成28年12月20日

石黒　順也

第1章　準備

この1章では本論文を読み解く上での準備として、解析関数芽の概念と後で必要となる初等整数論的性質について述べる。

1.1　解析関数芽

最初に C^r 級関数と C^∞ 級関数について定義する。

定義 1.1.1 $f(x_1,\cdots,x_n)$ を $\mathbb{R}^n$ のある開集合 U で定義された関数とする。自然数 r に対して、U の各点 p における f の r 次までの偏微分係数

$$\frac{\partial^{a_1+\cdots+a_n} f}{\partial {x_1}^{a_1}\cdots\partial {x_n}^{a_n}}(p)\quad (a_i \geqq 0,\ a_1+\cdots+a_n \leqq r)$$

がすべて存在して、これらが U において連続であるとき、f を U 上の r 回連続的微分可能関数または C^r 級関数という。

さらに、すべての自然数 r について f が U 上で C^r 級であるとき、f を U 上の無限回連続的微分可能関数または C^∞ 級関数という。

定義 1.1.2 $f(x_1,\cdots,x_n)$ を $\mathbb{R}^n$ のある開集合 U で定義された関数とする。f が U 上で C^∞ 級であり、U の各点 p において n 重級数

$$\sum_{m_1,\cdots,m_n=0}^{\infty}\frac{1}{m_1!\cdots m_n!}\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n} f}{\partial {x_1}^{m_1}\cdots\partial {x_n}^{m_n}}(p)(x_1-p_1)^{m_1}\cdots(x_n-p_n)^{m_n}$$

が p の十分小さな近傍で、絶対かつ一様に収束して $f(x_1,\cdots,x_n)$ に等しくなるとき、f を U 上の解析関数または C^ω 級関数という。

定義 1.1.3 $\mathbb{R}^n$ のある開集合 U から $\mathbb{R}^m$ の中への写像を $f=(f_1,\cdots,f_m)$ とする。各 f_i が U 上で C^r 級 $(1\leqq r\leqq\omega)$ であるとき、写像 f を U から $\mathbb{R}^m$ への C^r 級写像という。

C^r 級であるが C^{r+1} 級ではない関数、C^∞ 級であるが C^ω 級ではない関数として次のような例がある。

例 1.1.4 非負整数 r に対し、関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases} x^{r+1} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases} \tag{1.1}$$

と定義すると、f は $\mathbb{R}$ 上 C^r 級であるが、原点で C^{r+1} 級ではない。

例 1.1.5 $r\in\mathbb{R}$ に対し、関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases} \tag{1.2}$$

と定義すると、f は $\mathbb{R}$ 上 C^∞ 級であるが、原点で C^ω 級ではない。

次に複素解析写像を定義する。

定義 1.1.6 $\mathbb{C}^n$ 内のある領域 (連結開集合) D で定義された関数、$f(z_1,\ldots,z_n)$ が D 内の各点で全微分可能であるとき、f は D で正則であるという。また、f が D の各点 p で定義 1.1.2 と同様に収束冪級数展開されるとき、実の場合と同様に f を解析関数とよぶ。複素の場合には正則関数であることと解析関数であることが同値であることがよく知られている。(例えば、[12] を参照)

D から $\mathbb{C}^m$ への写像 $f=(f_1,\cdots,f_m)$ が解析写像であることを各 f_i が D 上の解析関数であることと定義する。

次に解析関数芽を定義する。

定義 1.1.7 X、Y を位相空間、x を X の点とする。X から Y の中への写像全体の集合を M (X,Y) で表す。f,g を M (X,Y) の元とする。x の近傍 W が存在して、$f\,|_W = g\,|_W$ となるとき、f と g は点 x で同じ芽 (germ) を持つという。同じ芽を持つという関係は同値関係である。$f\in$M(X,Y) の属するこの同値関係による同値類のことを、f の x における写像芽といい、$[f]_x$ であらわす。また、f を写像芽 $[f]_x$ の代表元という。

X,Y がそれぞれ $\mathbb{R}^n$ の開集合と $\mathbb{R}^m$、または $\mathbb{C}^n$ の開集合と $\mathbb{C}^m$ であるとき、解析写像を代表元として含む写像芽のことを解析写像芽という。

本論文では写像芽 $[f]_x$ を $f:(X,x)\to Y$ と表し、$f(x)=y\in Y$ となる写像芽を $f:(X,x)\to(Y,y)$ と表すことにする。従って、$f:(\mathbb{R}^2,O)\to(\mathbb{R},0)$ と書くとき、f は $O\in\mathbb{R}^2$ における関数芽で $f(O)=0$ となるものを表している。ここで $\mathbb{R}^2$ の原点 $(0,0)$ を単に O と記している。

この小節の最後に写像の特異点の概念を定義する。

定義 1.1.8 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし、$f=(f_1,\cdots,f_p):(\mathbb{K}^n,0)\to(\mathbb{K}^p,0)$ を $f(0)=0$ となる C^1 級写像、複素の場合には正則写像の $0\in\mathbb{K}^n$ での芽とする。

(1) $0\in\mathbb{K}^n$ における f の**ヤコビ行列** $(Jf)_0$ とは次の p 行 n 列の行列のことである：

$$(Jf)_0=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(0)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(0) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(0)\end{bmatrix}$$

(2) $0\in\mathbb{K}^n$ が f の**特異点** (singular point) であるとは、

$$rank(Jf)_0<min(n,p)$$

となるときにいう。そうでないとき、$0\in\mathbb{K}^n$ を f の**正則点** (regular point) とよぶ。

特に、$p=1$ のとき、即ち f が関数のとき、$0\in\mathbb{K}^n$ が f の特異点であるための必要十分条件は任意の $i,\ 1\le i\le n$ に対し、$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)=0$ となることである。

1.2 初等整数論的性質

ここでは本論文の主要テーマである福井不変量を計算するうえで必要となる初等整数論的性質について、安納秀佳さんの修士論文 [11] の中で与えられた単位分数の和で表せる数について、結果のみを紹介する。

定義 1.2.1 自然数の集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_d\}$ および $n\in\mathbb{N}$ に対し、n が A で表現可能であるとは,

$$n=m_1a_1+m_2a_2+\ldots+m_da_d$$

となる非負整数 $m_1,m_2,\ldots,m_d$ が存在することである。

命題 1.2.2 $g.c.d(a_1, a_2, \cdots, a_d) = 1$ である自然数の集合 $A = \{a_1, \cdots, a_d\}$ に対し、ある $M \in \mathbb{N}$ が存在して M 以上の自然数はすべて A で表現可能である。

上記の福井不変量の計算には、以下に述べる命題の証明の過程が用いられる。したがって、命題だけではなくその証明に用いられる補題も列挙しておく。

補題 1.2.3 $g.c.d(p, q) = 1$ である自然数 p, q に対し、$0, q, 2q, \cdots, (p-1)q$ を p で割った余りはすべて異なる。

ここで、$g.c.d(p, q) = d$ である自然数 p, q に対し、$p = p_1 d, q = q_1 d$ とすると $g.c.d(p_1, q_1) = 1$ となることに注意すれば、補題 1.2.3 の系として次を導くことができる。

系 1.2.4 自然数 p, q に対し、$g.c.d(p, q) = d$、p, q の最小公倍数を $[p, q] = p_1 q_1 d = p_1 q = p q_1$ とする。このとき、$0 < m < q_1, 0 < n < p_1$ で $mp = nq$ となる自然数 m, n は存在しない。

証明　$mp = nq$ と仮定すると、$p = p_1 d, q = q_1 d$ より、$g.c.d(p_1, q_1) = 1$ で、$mp_1 d = nq_1 d$ となる。このとき、$mp_1 = nq_1$ となるので、これは補題 1.2.3 に矛盾する。従って、$0 < m < q_1, 0 < n < p_1$ で $mp = nq$ となる自然数 m, n は存在しない。

□

補題 1.2.5 $g.c.d(p, q) = d$ である自然数 p, q に対し、ある $M \in \mathbb{N}$ が存在して、M 以上の d の倍数は p, q で表現可能である。

特に、$g.c.d(p, q) = 1$ である自然数 p, q に対し、ある $M \in \mathbb{N}$ が存在して M 以上の任意の自然数は p, q で表現可能である。

補題 1.2.6 自然数 m, n に対して m, n の公倍数は m, n の最小公倍数の倍数である。

補題 1.2.7 自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_d, k$ に対して、$k \mid g.c.d(a_1, a_2, \cdots, a_d)$ であるための必要十分条件は、k が $a_1, a_2, \cdots, a_d$ の全てを割り切ることである。

補題 1.2.8 自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_d, a_{d+1}$ に対し

$$g.c.d(g.c.d(a_1, a_2, \cdots, a_d), a_{d+1}) = g.c.d(a_1, a_2, \cdots, a_d, a_{d+1})$$

が成り立つ。

一つの自然数 a に対し、$g.c.d(a) = a$ と定義する。このとき次の命題が成り立つ。

命題 1.2.9 $g.c.d(a_1, a_2, \cdots, a_k) = d$ である自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_k (k \geqq 1)$ に対し、ある $M \in \mathbb{N}$ が存在して、d の倍数で M 以上の自然数は $a_1, a_2, \cdots, a_k$ で表現可能である。

第2章　ブロー解析同値

本章では実解析関数芽に対するブロー解析同値の概念を導入する。そのために、最初にブローアップの定義を述べ、それを用いて実解析関数に対するブロー解析同値を定義し、いくつかのブロー解析自明性定理を与える。

2.1　平面のブローアップ

本論文では、主として2変数解析関数に対する福井不変量を研究対象にするので、ここでは平面のブローアップについて詳しく説明する。

まず、用いる記号について説明する。

定義 2.1.1 $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ なる実数の組 (α,β) に対し、関係 $\sim$ を次で定義する。

$(\alpha,\beta)\sim(\alpha',\beta')\Leftrightarrow t\in\mathbb{R}\setminus\{O\}$ で、$\alpha=t\alpha',\beta=t\beta'$ となるものが存在する。

この同値関係による (α,β) の同値類を記号 $[\alpha;\beta]$ で表し、同値関係 $\sim$ による $\mathbb{R}^2\setminus\{O\}$ の商空間を実射影直線とよび、$\mathbf{P}^1(\mathbb{R})$ または $\mathbf{P}^1$ と表すこととする。

$$P^1=P^1(\mathbb{R}):=\mathbb{R}^2\setminus\{O\}/\sim$$

ここで $\mathbb{R}^2$ の原点 $(0,0)$ を単に O と記している。

次に平面の原点ブローアップについて定義する。

定義 2.1.2

$$M=\{(x,y)\times[\alpha;\beta]\in\mathbb{R}^2\times P^1\mid x\alpha=y\beta\}$$

とおき、自然な射影 $\mathbb{R}^2\times P^1\to\mathbb{R}^2$ の M への制限を

$$\pi:M\to\mathbb{R}^2,\ (x,y)\times[\alpha;\beta]\mapsto(x,y)$$

と書く。これを平面の原点ブローアップという。このとき、$O \in \mathbb{R}^2$のことをブローアップ$\pi : M \to \mathbb{R}^2$の中心、$E = \pi^{-1}(O)$のことを例外集合とよぶ。

このとき次の事実が容易に確かめられる。

定理 2.1.3

$$\pi^{-1}(O) = \{O\} \times P^1$$

証明　任意の$(\alpha, \beta) \in P^1$に対し, $0\alpha = 0\beta = 0$より, $\{O\} \times P^1 \subset M$に注意すると、

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(O) &= \{(x,y) \times [\alpha;\beta] \in M \mid \pi((x,y) \times [\alpha;\beta]) = O\} \\
&= \{(x,y) \times [\alpha;\beta] \in M \mid x = y = 0\} \\
&= \{(0,0) \times [\alpha;\beta] \in M\} \\
&= \{O\} \times P^1
\end{aligned}$$

□

定理 2.1.4

$$\pi\,|_{M \setminus \pi^{-1}(O)} : M \setminus \pi^{-1}(O) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$$

は全単射である。

証明　まず、$\pi\,|_{M \setminus \pi^{-1}(O)}$が単射であることを示す。

$$(x,y) \times [\alpha;\beta],\ (x',y') \times [\alpha';\beta'] \in M \setminus \pi^{-1}(O)$$

に対し、

$$\pi((x,y) \times [\alpha;\beta]) = \pi((x',y') \times [\alpha';\beta'])$$

とする。このとき、

$$\pi((x,y) \times [\alpha;\beta]) = (x,y),\ \pi((x',y') \times [\alpha';\beta']) = (x',y')$$

より、$x = x',\ y = y'$である。

一方、$x\alpha = y\beta,\ x'\alpha' = y'\beta'$であることより、上のことから、$x\alpha = y\beta,\ x\alpha' = y\beta'$となり、

$$\alpha : \beta = y : x = \alpha' : \beta'$$

が従う。よって、$[\alpha;\beta]=[\alpha';\beta']$ となるので、

$$(x,y)\times[\alpha;\beta]=(x',y')\times[\alpha';\beta']$$

が言えるので、$\pi\mid_{M\setminus\pi^{-1}(O)}$ は単射である。

次に、$\pi\mid_{M\setminus\pi^{-1}(O)}$ が全射であることを示す。任意の $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{O\}$ とする。このとき、$\alpha=y,\beta=x$ とすれば $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ で、$x\alpha=y\beta$ より、

$$(x,y)\times[\alpha;\beta]\in M\setminus\pi^{-1}(O)$$

で、

$$\pi((x,y)\times[\alpha;\beta])=(x,y)$$

となる。 よって $\pi\mid_{M\setminus\pi^{-1}(O)}$ が全射である。

以上のことより、$\pi\mid_{M\setminus\pi^{-1}(O)}$ は全単射である。

□

次に、ブローアップの地図について述べる。

定義 2.1.5 平面のブローアップで得られた集合 M において、M の被覆 $\{U,V\}$ として次を定義する。

$$U=\{(x,y)\times[\alpha;\beta]\in\mathbb{R}^2\times P^1\mid x\alpha=y\beta,\ \alpha\neq0\}$$

$$V=\{(v,y)\times[\alpha;\beta]\in\mathbb{R}^2\times P^1\mid x\alpha=y\beta,\ \beta\neq0\}$$

$M=U\cup V$ は明らかである。

写像 φ,ϕ を次で定義する。

$$\varphi:U\to\mathbb{R}^2,(x,y)\times[\alpha;\beta]\mapsto(u,v)=(x,\frac{\beta}{\alpha})$$

$$\phi:V\to\mathbb{R}^2,(x,y)\times[\alpha;\beta]\mapsto(u',v')=(\frac{\alpha}{\beta},y)$$

このとき

$$\phi\circ\varphi^{-1}:\mathbb{R}^2\cap\varphi(U)\to\mathbb{R}^2\cap\phi(V),\ (u,v)\to(u',v')=(\frac{1}{v},uv)$$

は 解析同型写像である。よって、M は $U(u,v),V(u',v')$ を次の関係式で張り合わせて得られる図形であると考えることができる。

$$(u',v')=(\frac{1}{v},uv)$$

U,V をブローアップの地図といい、これを M の地図による表示という。

ここで

$$\phi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \cap \varphi(U) \to \mathbb{R}^2 \cap \phi(V),\ (u,v) \to (u',v') = (\frac{1}{v}, uv)$$

が解析同型写像であることを示す。

証明　まず、φ が単射であることを示す。

$$\varphi((x,y) \times [\alpha;\beta]) = \varphi((x',y') \times [\alpha';\beta'])$$

とすると、

$$(x, \frac{\beta}{\alpha}) = (x', \frac{\beta'}{\alpha'}) \text{ より、} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'}{\alpha'}$$

となり、

$$x = x',\ [\alpha;\beta] = [\alpha';\beta']$$

が従う。また、

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x = \frac{\beta'}{\alpha'}x = \frac{\beta'}{\alpha'}x' = y'$$

も言えるので、φ は単射である。同様にϕも単射である。

次にφが全射であることを示す。$x \in \mathbb{R}$ より $(-\infty,\infty)$ の任意の元をとる。$[\alpha;\beta] \in P^1, \alpha \neq 0$ より、

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (-1 < \beta < 1)$$

としてよい。$\beta \to \pm 1$ のとき、

$$\frac{\beta}{\alpha} \to \pm\infty$$

であるので、$\frac{\beta}{\alpha}$ は x と独立に $(-\infty,\infty)$ の任意の元をとる。よって、φ は全射である。同様に ϕ も全射である。したがって、

$$\phi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \cap \varphi(U) \to \mathbb{R}^2 \cap \phi(V)$$

は全単射となり、$\varphi \circ \phi^{-1}$ も全単射である。

また、$u = x, v = \frac{\beta}{\alpha}$ より

$$u' = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{v},\ v' = y = (y \cdot \frac{\alpha}{\beta})\frac{\beta}{\alpha} = xv = uv$$

$u' = \frac{\alpha}{\beta}$, $v' = y$ より

$$u = x = \frac{\alpha}{\beta}(\frac{\beta}{\alpha}x) = u'y = u'v',\ v = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{u'}$$

となる。したがって、$\phi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \cap \varphi(U) \to \mathbb{R}^2 \cap \phi(V)$ は

$$(u, v) \to (u', v') = (\frac{1}{v}, uv)$$

と表される。$\varphi \circ \phi^{-1}$ についても同様の表示を持つ。

このことから、いずれの写像も解析的なので、

$$\phi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \cap \varphi(U) \to \mathbb{R}^2 \cap \phi(V),\ (u, v) \to (u', v') = (\frac{1}{v}, uv)$$

が 解析同型写像であることがわかる。

□

次に、n 次元空間の原点ブローアップの定義も与えておく。

n 次元空間の原点ブローアップの定義を述べるための準備として実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ の定義を述べる。

定義 2.1.6 n 次元球面を

$$S^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

とする。このとき、S^n 上の 2 点 x, y に対して関係 $x \sim y$ を $x = y$ または $-y$ によって定義すると、これは同値関係になる。

この同値関係によって S^n から導かれる商位相空間を n 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^n$、即ち

$$\mathbb{R}P^n := S^n / \sim$$

と定義する。

定義 2.1.7 まず、$\mathbb{R}^n \times P^{n-1}$ の部分集合 M を次で定義する。

$$M = \{(x_1, \ldots, x_n) \times [\varepsilon_1 : \ldots : \varepsilon_n] \in \mathbb{R}^n \times P^{n-1} \mid x_i\varepsilon_j = x_j\varepsilon_i, 1 \leq i, j \leq n\}$$

自然な射影 $\mathbb{R}^n \times P^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ の M への制限を

$$\pi : M \to \mathbb{R}^n,\ (x_1, \ldots, x_n) \times [\varepsilon_1 : \ldots : \varepsilon_n] \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

と書く。これを　$\mathbb{R}^n$ の原点ブローアップという。

この項の最後に、平面の原点ブローアップを用いた特異点解消について説明する。代数幾何や解析学の問題は特異点があるために問題が非常に難解になるが、特異点はブローアップという操作を繰り返すことにより解消することができる。それは、上手い座標変換を行えば単項式となることを意味している。広中先生の仕事 [[5]] により、多項式や解析関数には特異点解消が存在することが知られているが、特異点解消の存在定理により、多項式や解析関数の計算は、単項式という簡単な式の計算に還元される。次の例でそのことを解説する。

例 2.1.8 定義2.1.2で定めたメビウスの帯 M に座標を定める。(X,Y) を座標に持つ $\mathbb{R}^2$ と (X',Y') を座標に持つ $\mathbb{R}^2$ とを $(XY,Y)=(X',X'Y')$ で決まる関係式を組み合わせてメビウスの帯 M を作り、

$$(x,y)=(XY,Y)=(X',X'Y')$$

で平面の原点ブローアップ $\pi : M \to \mathbb{R}^2$ を定める。

ここで、$(x,y)=(XY,Y)$ を $f(x,y)=x^2-y^3$ に代入すると、

$$f(XY,Y)=X^2Y^2-Y^3=Y^2(X^2-Y)$$

$(X,Y)=(0,0)$ で定まる点で局所的に単項式ではないので、ここで更にブローアップする。$(X,Y)=(s,st)$ を代入すると

$$x^2-y^3=Y^2(X^2-Y)=s^3t^2(s-t)$$

$(s,t)=(0,0)$ で定まる点で局所的に単項式ではないので、更にここでブローアップする。$(s,t)=(pq,q)$ と置くと

$$x^2-y^3=Y^2(X^2-Y)=s^3t^2(s-t)=p^3q^6(q-1)$$

で、$(p,q)=(0,0)$ の周りで局所的に $q-1$ は単元 (unit) となり、各点の近傍で単項式となる。これで、x^2-y^3 の特異点解消が構成できた。

ここで関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) の近傍で単項式になるとは、正確には次の意味である。点 (a,b) の近傍で定義された関数 $\varphi(x,y),\phi(x,y)$ が存在して次を満たす。

$$\begin{vmatrix} \varphi_x(a,b) & \varphi_y(a,b) \\ \phi_x(a,b) & \phi_y(a,b) \end{vmatrix} \neq 0, f(x,y)=\varphi(x,y)^p\phi(x,y)^q,\ \ (p,q)\text{は負でない整数}$$

,

2.2　ブロー解析同値とブロー解析自明性

最初に、2変数解析関数に対するブロー解析同値の定義を述べる。

定義 2.2.1 実解析関数芽

$$f, g : (\mathbb{R}^2, O) \to (\mathbb{R}, 0)$$

がブロー解析同値であるとは、有限個の一点ブローアップの合成

$$\beta : (M, \beta^{-1}(O)) \to (\mathbb{R}^2, O)$$

$$\beta' : (M', \beta'^{-1}(O)) \to (\mathbb{R}^2, O)$$

と解析同型写像

$$\Phi(M, \beta^{-1}(O)) \to (M', \beta'^{-1}(O))$$

位相同型写像

$$\phi : (\mathbb{R}^2, O) \to (\mathbb{R}^2, O)$$

が存在して、次の可換図式を満たすときにいう。

$$\begin{tikzcd}
(M, \beta^{-1}(O)) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowright"] & & (M', \beta'^{-1}(O)) \arrow[d, "\beta'"] \\
(\mathbb{R}^2, O) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "f"'] & {} \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & (\mathbb{R}^2, O) \arrow[dl, "g"] \\
& (\mathbb{R}, 0) &
\end{tikzcd}$$

注意 2.2.2 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする。有限回の一点ブローアップの合成とは、ある自然数 n に対し、次を満たす写像 $\beta_i : M_i \to M_{i-1}$ $(1 \le i \le n)$、ただし、$M_0 = \mathbb{K}^2$ を満たす写像の合成 $\beta = \beta_n \circ \cdots \circ \beta_1 : M_n \to \mathbb{K}^2$ のことである。
(1)$\beta_1 : M_1 \to \mathbb{K}^2$ は $O \in \mathbb{K}^2$ を中心とするブローアップである。
(2)$2 \le i \le n$ に対し、$\beta_i : M_i \to M_{i-1}$ は、$\beta_{i-1} \circ \cdots \circ \beta_1$ の例外集合 E_{i-1} 上の点を中心とするブローアップである。

定義 2.2.3 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし、$f : (\mathbb{K}^2, O) \to (\mathbb{K}, 0)$ を解析関数芽、$O \in V = f^{-1}(0)$ を解析曲線とする。このとき、有限回の一点ブローアップの合成

$$\beta = \beta_n \circ \beta_{n-1} \circ \cdots \circ \beta_1 : M_n \to \mathbb{K}^2$$

による V の**強変換** (strict transform) を $\overline{\beta^{-1}(V \setminus \{0\})}$ と定義する。

注意 2.2.4 一般の n 変数の場合にも、上の可換図式において β, β' を実改変 (real modification) という改変を用いて、ブロー解析同値の概念が導入されている（[10]）。実改変の概念は複雑なのでここでは述べないが、2 変数の場合は、1 点ブローアップの合成で表されることが知られている。([3],[7]) 実改変を用いて解析同値の概念が定義されている。理由は、それが実解析関数芽に対する同値関係を与えているからである ([10])。

ここで、写像 $M \to \mathbb{R}^n$, (但し、M は n 次元非特異多様体) が改変であるとは、M の中に $n-1$ 次元以下の部分代数的集合 n が存在して、π の $M \setminus n$ への制限

$$\pi \mid_{M \setminus n} : M \setminus n \to \mathbb{R}^n \setminus \pi(n)$$

が解析同型写像となるときにいう。前節で見たように、原点ブローアップは改変の一つである。

次に、実解析関数族に対するブロー解析自明性の概念を導入する。

定義 2.2.5 I を開区間とする。$(x;t) = (x_1, \ldots, x_n; t)$ に関する解析関数 $F(x;t)$ をとり、解析関数の族 $\{f_t\}_{t \in I}$, $f_t(x) = F(x;t)$ を考える。$\pi : (M, E) \to (\mathbb{R}^n, O)$, $E = \pi^{-1}(O)$ を $\mathbb{R}^n$ の固有改変とする。

関数族 $\{f_t\}_{t \in I}$ が固有改変 π を通して解析的に自明であるとは、次の条件

(I) $h \circ (\pi \times id_I) = (\pi \times id_I) \circ H$

(II) $F \circ h(x;t)$ は t に依存しない、すなわち、$f_t \circ h_t(x)$ は t に依存しない。

を満たす位相同型写像 $h : (\mathbb{R}^n, O) \times I \to (\mathbb{R}^n, O) \times I, (x;t) \mapsto (h_t(x);t)$ と実解析同型写像 $H : (M, E) \times I, (y;t) \mapsto (H_t(y);t)$ が存在するときにいう。

特に、π が固有実改変、その π にこだわらないときには、単に族 $\{f_t\}_{t \in I}$ はブロー解析自明であるという。

可換図式を用いてかくと次のようになる。

$$
\begin{tikzcd}
(M,E)\times I \arrow[r, "\pi\times id_I"] \arrow[d, "H"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (\mathbb{R}^2,O)\times I \arrow[r, "F_0"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (\mathbb{R},0) \arrow[d, equal] \\
(M,E)\times I \arrow[r, "\pi\times id_I"] & (\mathbb{R}^2,O)\times I \arrow[r, "F"] & (\mathbb{R},0)
\end{tikzcd}
$$

ブロー解析自明性に関する最初の定理は、T.-C.Kuo によって与えられている。

定理 2.2.6 同次形式におけるブロー解析自明性定理 ([9])

$\pi : (M, E) \to (\mathbb{R}^n, O), E = \pi^{-1}(O)$ を原点 O でのブローアップとする。解析関数 $F(x;t)$ を次のように書いておく

$$F(x;t) = F_d(x;t) + F_{d+1}(x;t) + \ldots, t \in I$$

ここで、すべての $q \geq d$ に対し、$F_q(x;t)$ は $x = (x_1, \ldots, x_n)$ に関する q 次同次多項式である。

すべての $t \in I$ に対して、初期形式 $F_d(x;t)$ が孤立特異点を持つと仮定する。すなわち、

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\partial F_d}{\partial x_1}(x;t) = \ldots = \frac{\partial F_d}{\partial x_n}(x;t) = 0\} = \{O\} \quad (t \in I)$$

が成り立つならば、$F(x;t)$ は $\mathbb{R}^n$ の原点 O でのブローアップ π を通して、実解析自明な族になる。

定理 2.2.6 の同次形式の場合のブロー解析自明性定理を、実トーリック改変を用いて重み付き同次形式の場合に一般化されたブロー解析自明性定理が得られている。

定理 2.2.7 重み付き同次形式におけるブロー解析自明性定理 ([3])
解析関数 $F(x;t)$ を次のように書いておく：

$$F(x;t) = F_d(x;t) + F_{d+1}(x;t) + \ldots, t \in I$$

ここで、すべての $q \geq d$ に対し、$F_q(x;t)$ は $x = (x_1, \ldots, x_n)$ に関する重み付き次数 q の重み付き同次多項式である。

すべての $t \in I$ に対して、重み付き初期形式 $F_d(x;t)$ が孤立特異点を持つと仮定する。すなわち、

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\partial F_d}{\partial x_1}(x;t) = \ldots = \frac{\partial F_d}{\partial x_n}(x;t) = 0\} = \{O\} \quad (t \in I)$$

が成り立つならば、$F(x;t)$ はある実トーリック改変 π を通して、解析自明な族になる。

注意 2.2.8 ここでは実改変、実トーリック改変の定義は述べない。関心のある方は ([4]) または ([15]) を参照されたい。実トーリック改変も実改変であることに注意しておきたい。

第3章　福井不変量

この章では、本論文の話題の中心となる福井不変量の定義を述べ、それがブロー解析不変量であることの証明を与える。次に、定義に基づいて、2変数ブリスコーン多項式の福井不変量を計算する。さらに、簡約化を通した福井不変量の計算公式を紹介し、それを用いた計算例を述べる。

3.1　福井不変量

この節では2変数解析関数に対して福井不変量の概念を定義する。そのためにまず、一変数解析関数芽に対する位数の定義を述べる。

定義 3.1.1 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし、$g:(\mathbb{K},0)\to(\mathbb{K},0)$ を解析関数芽とする。このとき、g は次のように $0\in\mathbb{K}$ の周りで収束冪級数展開できる。

$$g(t)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m t^m \quad \text{ただし} \quad a_m=\tfrac{1}{m!}\tfrac{d^m f}{dt^m}(0)$$

である。このとき、$O\in\mathbb{K}$ で g の位数 (order) $O(g(t))$ は $a_m\neq 0$ となる最小の m のことである。ただし、すべての $m\in\mathbb{N}$ に対し $a_m=0$ のとき、$O(g(t))=\infty$ とする。

定義 3.1.2 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ とし、$f:(\mathbb{K}^2,O)\to(\mathbb{K},0)$ を恒等的に0ではない解析関数芽とする。$\lambda(t)$ を次のように表される任意の解析弧 (解析平面曲線) とする。

$$\lambda(t)=(\lambda_1(t),\lambda_2(t)):\ (\mathbb{K},0)\to(\mathbb{K}^2,O)$$

ただし、$\lambda_i(t)$ は t に関する収束冪級数で、$\lambda_i(0)=0$ とする。全ての解析弧全体の集合を

$$\Lambda(1,2:\mathbb{K})=\{\lambda:(\mathbb{K},0)\to(\mathbb{K}^2,O)\ \text{解析弧}\}$$

とおく。任意の $\lambda \in \Lambda(1,2:\mathbb{K})$ に対し、$f(\lambda(t)):\ (\mathbb{K},0) \to (\mathbb{K},0)$ の t に関する位数, $O(f(\lambda(t)))$, は自然数または ∞ である。ここで、そのような位数全体の集合を考えて、

$$A_{\mathbb{K}}(f) = \{O(f(\lambda(t)) : \lambda \in \Lambda(1,2:\mathbb{K})\}$$

とおき、f の福井不変量とよぶ。

例 3.1.3 実解析関数 $f:(\mathbb{R},0) \to (\mathbb{R},0)$ を $f(x) = sinx$ とする。このとき、$0 \in \mathbb{R}$ における位数 $O(f(x))$ を求める。$0 \in \mathbb{R}$ での $sinx$ のテイラー展開は

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

より、$O(f(x)) = 1$ である。

注意 3.1.4 一般の n 変数解析関数芽 $f:(\mathbb{K}^n,0) \to (\mathbb{K},0)$ に対しても福井不変量が同様に定義される。福井不変量の最初に現れる数 (最小の数) は、解析関数 f の重複度と呼ばれているものになっている。

ここで、記号を導入し、補題を準備する。

(記号)

(1) 自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対し、$\mathbb{N}_{\geq m} = \{m, m+1, m+2, \ldots\}$ とおく。

(2) 自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対し、$\mathbb{N}_{\leq m} = \{1,2,3,\ldots,m\}$ とおく。

(3) 自然数 $p \in \mathbb{N}$ に対し、$p\mathbb{N} := \{p, 2p, 3p, \cdots\}$ と定義する。

補題 3.1.5 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする。$c \in A_{\mathbb{K}}(f)$ かつ $k \in \mathbb{N}$ のとき $kc \in A_{\mathbb{K}}(f)$ である。即ち、$c \in A_{\mathbb{K}}(f)$ ならば、$c\mathbb{N} \subset A_{\mathbb{K}}(f)$ である。

証明　解析弧 $\lambda:(\mathbb{K},0) \to (\mathbb{K}^2,O)$ に対し、$O(f \circ \lambda(t)) = c$ とする。$O(f \circ \lambda(t^k)) = kO(f \circ \lambda(t)) = kc$ より $kc \in A(f)$

□

次に、例を用いて福井不変量を計算するうえでの一つの重要なテクニックを紹介する。

例 3.1.6 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする。$f:(\mathbb{K}^2,O) \to (\mathbb{K},0)$ を $f(x,y) = x^4 - y^6$ とする。このとき、4と6の最小公倍数 $[4,6] = 12$ を超える13以上の自然数は $A_{\mathbb{K}}(f)$ の元になることを示すテクニックを紹介する。

2つの項の符号が異なることに着目し、上手く解析弧(x,y)の値を定めると、最低次の項を消去できることを利用する。任意の自然数nに対し、$m=12+n$とする。このとき、

$$x(t)=t^3+t^{3+n},\ y(t)=t^2$$

とおくと、

$$f(t^3+t^{3+n},t^2)=(t^3+t^{3+n})^4-(t^2)^6=4t^{12+n}+6t^{12+2n}+4t^{12+3n}+t^{12+4n}$$

である。従って、$m=12+n\in A_{\mathbb{K}}(f)$となり、$\mathbb{N}_{\geq 13}\subset A_{\mathbb{K}}(f)$であることがわかる。このことを用いて、$f$の福井不変量は

$$A_{\mathbb{K}}(f)=\{4,6,8,12,13,14,15,\cdots\}\cup\{\infty\}$$

であることが示される。詳細は後述の定理3.2.3、定理3.2.4(1)を参照のこと。

次に、上の関数の符号を変えた関数に対する福井不変量も述べておく。

例 3.1.7 $f:(\mathbb{K}^2,O)\to(\mathbb{K},0)$を$f(x,y)=x^4+y^6$とする。
(I) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$のとき、

$$\begin{aligned}A_{\mathbb{R}}(f)&=4\mathbb{N}\cup 6\mathbb{N}\cup\{\infty\}\\&=\{4,6,8,12,16,18,20,\ldots\}\cup\{\infty\}\end{aligned}$$

である。詳細については定理3.2.4(2)を参照のこと。
(II) $\mathbb{K}=\mathbb{C}$のとき、$x=X, y=i^{\frac{1}{3}}Y$という複素線形変換を行うと、

$$\tilde{f}(X,Y)=f(X,i^{\frac{1}{3}}Y)=X^4-Y^6$$

となる。定義より、福井不変量は解析同型で不変より、例3.1.6の結果を用いて、

$$A_{\mathbb{C}}(f)=A_{\mathbb{C}}(\tilde{f})=\{4,6,8,12,13,14,15,\cdots\}\cup\{\infty\}$$

であることが従う。

福井不変量は実解析関数芽に対するブロー解析同値に関する不変量であることの証明を述べる。そのために、最初に弧持ち上げ性質(arc lifting property)を証明抜きで与えておく。証明については([7])または([3])を参照のこと。

補題 3.1.8 弧持ち上げ性質

π を $\mathbb{R}^2$ の一点ブローアップの合成とし、$\gamma \in \Lambda(1,2;\mathbb{R})$ とする。このとき、解析弧 $\gamma^* : (\mathbb{R},0) \to (m, \pi^{-1}(O))$ で、$\pi \circ \gamma^* = \gamma$ となるものが存在する。

注意 3.1.9 弧持ち上げ性質は、一般の n 次元の場合に対しても成り立つ。更に、ブローアップの合成だけでなく、実改変に対しても同様に成り立つ。

定理 3.1.10 (T.Fukui) $f, g : (\mathbb{R}^2, O) \to (\mathbb{R}, 0)$ を実解析関数芽とする。このとき、f, g がブロー解析同値ならば、$A_{\mathbb{R}}(f) = A_{\mathbb{R}}(g)$ である。

証明 実解析関数芽 $f, g : (\mathbb{R}^2, O) \to (\mathbb{R}, 0)$ がブロー解析同値であり、$k \in A_{\mathbb{R}}(f)$ とする。このとき、解析弧 $\lambda : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^2, O)$ で、$O(f(\lambda(t))) = k$ となるものがある。

$$\begin{tikzcd}
 & (M,\beta^{-1}(O)) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\beta"] & (M',\beta'^{-1}(O)) \arrow[d, "\beta'"] \\
(\mathbb{R},0) \arrow[ru, "\lambda^*"] \arrow[r, "\lambda"'] \arrow[ru, phantom, shift left=6, "\circlearrowright"] & (\mathbb{R}^2,O) \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[ru, phantom, "\circlearrowright"] & (\mathbb{R}^2,O) \arrow[d, "g"] \\
 & & (\mathbb{R},0)
\end{tikzcd}$$

補題 3.1.8 を用いると、解析弧 $\lambda^* : (\mathbb{R}, 0) \to (M, \beta^{-1}(O))$ で $\beta \circ \lambda^* = \lambda$ となるものが存在する。そうすると、

$$\beta' \circ \Phi \circ \lambda^* : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^2, O)$$

は解析弧で、

$$\begin{aligned} g\circ(\beta'\circ\Phi\circ\lambda^*) &= g\circ(\phi\circ\beta\circ\lambda^*) \\ &= g\circ(\phi\circ\lambda) \\ &= (g\circ\phi)(\lambda) \\ &= f(\lambda) \end{aligned}$$

となり、

$$k = O(f(\lambda)) = O(g\circ(\beta'\circ\Phi\circ\lambda^*)) \in A_{\mathbb{R}}(g)$$

が言える。よって、

$$A_{\mathbb{R}}(f) \subseteq A_{\mathbb{R}}(g)$$

が従う。同様に、$A_{\mathbb{R}}(g) \subseteq A_{\mathbb{R}}(f)$ が示されるので、

$$A_{\mathbb{R}}(f) = A_{\mathbb{R}}(g)$$

となる。

□

注意 3.1.11 (1) 上の注意 3.1.9 から任意の n 変数の場合にも上の証明が働くので、一般の n 変数の場合にも福井不変量はブロー解析不変量になる。

(2) 2変数複素解析関数に対しては、福井不変量が位相不変量になることが知られている ([8])。3変数以上の複素超関数に対して福井不変量が位相不変量であるかどうかの問題は、複素平面の重複度に関する Zariski 予想の一般化になり、きわめて難解な問題である。

3.2　2変数ブリスコーン多項式の福井不変量

最初に論文で用いる記号を準備する。p, q を $p \geq q$ となる自然数を表すことにする。このとき p, q の最大公約数 $(p, q) = d$ とするとき $p = p_1 d, q = q_1 d$ と表すことにする。p, q の最小公倍数 $[p, q] = p_1 q_1 d = q_1 p = p_1 q$ である。以下、この記号を用いる。

定義 3.2.1 **(2変数複素ブリスコーン多項式)** 次の形式で与えられる2変数複素多項式関数 $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$

$$f(x,y)=x^p+y^q$$

を、**2変数複素ブリスコーン多項式**とよぶ。

定義 3.2.2 **(2変数実ブリスコーン多項式)** 次の形式で与えられる2変数実多項式関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\pm x^p\pm y^q$$

を、**2変数実ブリスコーン多項式**とよぶ。

定理 3.2.3 **(2変数複素ブリスコーン多項式の福井不変量)**
$f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ を $f(x,y)=x^p+y^q$ で定義される2変数ブリスコーン多項式とする。このとき、

$$\begin{aligned}A_{\mathbb{C}}(f)&=\{p,2p,\ldots,(q_1-1)p\}\cup\{q,2q,\ldots,(p_1-1)q\}\cup\mathbb{N}_{\geq[p,q]}\cup\{\infty\}\\&=p\mathbb{N}\cup q\mathbb{N}\cup\mathbb{N}_{\geq[p,q]}\cup\{\infty\}\end{aligned}$$

である。

証明　最初に例3.1.6、例3.1.7(2)のテクニックを用いて $\mathbb{N}_{\geq[p,q]}\subset A_{\mathbb{C}}(f)$ であることを示す。そのためには、

$$f(t^{q_1},0)=f(0,t^{p_1})=t^{[p,q]}$$

より、$[p,q]\in A_{\mathbb{C}}(f)$ となるので、$\mathbb{N}_{\geq[p,q]+1}\subset A_{\mathbb{C}}(f)$ を示せばよい。任意の自然数 s に対し、解析弧 $(t^{q_1}+t^{q_1+s},i^{\frac{2}{q}}t^{p_1})$ を考えると

$$\begin{aligned}f(t^{q_1}+t^{q_1+s},i^{\frac{2}{q}}t^{p_1})&=(t^{q_1}+t^{q_1+s})^p+(i^{\frac{2}{q}}t^{p_1})^q\\&=pt^{[p,q]+s}+\frac{p^2}{2!}t^{[p,q]+2s}+\cdots+t^{[p,q]+ps}\end{aligned}$$

となる。したがって、$[p,q]+s\in A_{\mathbb{C}}(f)$ となるので、$\mathbb{N}_{\geq[p,q]+1}\subset A_{\mathbb{C}}(f)$ であることがわかる。

次に任意の解析弧を $\lambda(t)=(a(t),b(t)):(\mathbb{C}^2,O)\to(\mathbb{C},0)$ とする。
(I) $a(t)\equiv0$ かつ $b(t)\equiv0$ の場合、$f(\lambda(t))\equiv0$ となり、

$$\infty=O(f(\lambda(t)))\in A_{\mathbb{C}}(f)$$

となる。

(II) $a(t) \not\equiv 0$ かつ $b(t) \equiv 0$ の場合、$a(t)$ は次のように表される。

$$a(t) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k t^k \text{ ただし } a_m \neq 0$$

このとき、$(a(t), b(t))$ を f に代入すると、

$$f(\lambda(t)) = (\sum_{k=m}^{\infty} a_k t^k)^p = a_m^p t^{mp} + \sum_{k=mp+1}^{\infty} a'_k t^k$$

と表される。$a_m^p \neq 0$ より、

$$A_{\mathbb{C}}(f) \ni O(f(\lambda(t))) = mp \in p\mathbb{N}$$

となる。$1 \leq m < q_1$ となる任意の自然数 m に対して、$a(t) = t^m$ とすると、$mp \in A_{\mathbb{C}}(f)$ となるので、$\mathbb{N}_{<[p,q]}$ に現れるこの場合の福井不変量全体の集合は $p\mathbb{N} \cap \mathbb{N}_{<[p,q]}$ である。

(III) $a(t) \equiv 0$ かつ $b(t) \not\equiv 0$ の場合、(II) と同様に $\mathbb{N}_{<[p,q]}$ に現れる福井不変量全体の集合は $q\mathbb{N} \cap \mathbb{N}_{<[p,q]}$ である。

(IV) $a(t) \not\equiv 0$ かつ $b(t) \not\equiv 0$ の場合、$a(t), b(t)$ は次のように表される。

$$a(t) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k t^k \text{ ただし } a_m \neq 0$$

$$b(t) = \sum_{k=n}^{\infty} b_k t^k \text{ ただし } b_n \neq 0$$

このとき、$\lambda(t) = (a(t), b(t))$ を f に代入すると

$$\begin{aligned} f(\lambda(t)) &= (\sum_{k=m}^{\infty} a_k t^k)^p + (\sum_{k=n}^{\infty} b_k t^k)^q \\ &= a_m^p t^{mp} + \sum_{k=mp+1}^{\infty} a'_k t^k + b_n^q t^{nq} + \sum_{k=nq+1}^{\infty} b'_k t^k \end{aligned}$$

と表される。$max(mp, nq) < [p, q]$ のとき、系 1.2.4 より $mp \neq nq$ となり、

$$O(f(\lambda(t))) = min(mp, nq) \in (p\mathbb{N} \cup q\mathbb{N}) \cap \mathbb{N}_{<[p,q]} \tag{3.1}$$

となる。

以上より、(I)、(II)、(III) から

$$A_{\mathbb{C}}(f) \supset ((p\mathbb{N} \cup q\mathbb{N}) \cap \mathbb{N}_{<[p,q]}) \cup \mathbb{N}_{\geq [p,q]} \cup \{\infty\}$$

が成り立つ。更に (IV)、(3.1) を合わせると

$$A_{\mathbb{C}}(f) \supset ((p\mathbb{N} \cup q\mathbb{N}) \cap \mathbb{N}_{<[p,q]}) \cup \mathbb{N}_{\geq [p,q]} \cup \{\infty\} \supset A_{\mathbb{C}}(f)$$

となることより、

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{C}}(f) &= \{p, 2p, \ldots, (q_1 - 1)p\} \cup \{q, 2q, \ldots, (p_1 - 1)q\} \cup \mathbb{N}_{\geq [p,q]} \cup \{\infty\} \\ &= p\mathbb{N} \cup q\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_{\geq [p,q]} \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

である。

□

定理 3.2.4 (2 変数実ブリスコーン多項式の福井不変量)

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x, y) = \pm x^p \pm y^q$ で定義される 2 変数ブリスコーン多項式とする。

(1) p または q の少なくとも一方が奇数の場合、または、p, q がともに偶数で $f(x, y) = \pm x^p \mp y^q$ (複号同順) のとき、

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{R}}(f) &= \{p, 2p, \ldots, (q_1 - 1)p\} \cup \{q, 2q, \ldots, (p_1 - 1)q\} \cup \mathbb{N}_{\geq [p,q]} \cup \{\infty\} \\ &= p\mathbb{N} \cup q\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_{\geq [p,q]} \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

である。

(2) p, q がともに偶数で $f(x, y) = \pm(x^p + y^q)$ のとき、

$$A_{\mathbb{R}}(f) = p\mathbb{N} \cup q\mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

である。

証明　(1) この場合の証明は複素の場合と全く同様である。

(2) $f(x, y) = x^p + y^q$ のときに示す。$f(x, y) = -(x^p + y^q)$ のときも同様で

ある。任意の解析弧を $\lambda(t)=(a(t),b(t)):(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^2,O)$ とする。
(I) $a(t)\equiv 0$ かつ $b(t)\equiv 0$ の場合、$f(\lambda(t))\equiv 0$ となり、

$$\infty = O(f(\lambda(t)))\in A_{\mathbb{R}}(f)$$

となる。

(II) $a(t)\not\equiv 0$ かつ $b(t)\equiv 0$ の場合、$a(t)$ は次のように表される。

$$a(t)=\sum_{k=m}^{\infty} a_k t^k \text{ ただし } a_m\neq 0$$

このとき、$(a(t),b(t))$ を f に代入すると、

$$f(\lambda(t))=(\sum_{k=m}^{\infty} a_k t^k)^p = a_m^p t^{mp} + \sum_{k=mp+1}^{\infty} a'_k t^k$$

と表される。$a_m^p\neq 0$ より

$$A_{\mathbb{R}}(f)\ni O(f(\lambda(t)))=mp\in p\mathbb{N}$$

となる。任意の m に対して、$a(t)=t^m$ とすると $mp\in A_{\mathbb{R}}(f)$ となるので、この場合の解析弧全体が与える福井不変量全体の集合は $p\mathbb{N}$ である。

(III) $a(t)\equiv 0$ かつ $b(t)\not\equiv 0$ の場合、(II) と同様にこの場合の解析弧全体が与える福井不変量全体の集合は $q\mathbb{N}$ である。

(IV) $a(t)\not\equiv 0$ かつ $b(t)\not\equiv 0$ の場合、$a(t),b(t)$ は次のように表される。

$$a(t)=\sum_{k=m}^{\infty} a_k t^k \text{ ただし } a_m\neq 0$$

$$b(t)=\sum_{k=n}^{\infty} b_k t^k \text{ ただし } b_n\neq 0$$

このとき、$\lambda(t)=(a(t),b(t))$ を f に代入すると

$$\begin{aligned} f(\lambda(t)) &= (\sum_{k=m}^{\infty} a_k t^k)^p + (\sum_{k=n}^{\infty} b_k t^k)^q \\ &= a_m^p t^{mp} + \sum_{k=mp+1}^{\infty} a'_k t^k + b_n^q t^{nq} + \sum_{k=nq+1}^{\infty} b'_k t^k \end{aligned}$$

と表される。p, q がともに偶数より $mp = nq$ のときでも t^{mp} の係数と t^{nq} の係数の和は0にならない。従って、

$$A_{\mathbb{R}}(f) \ni O(f(\lambda(t))) = min(mp, nq) \in p\mathbb{N} \cup q\mathbb{N} \tag{3.2}$$

となる。

以上より、(I)、(II)、(III) から

$$A_{\mathbb{R}}(f) \supset p\mathbb{N} \cup q\mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

が成り立つ。更に (IV)、(3.2) を合わせて

$$A_{\mathbb{R}}(f) \supset p\mathbb{N} \cup q\mathbb{N} \cup \{\infty\} \supset A_{\mathbb{R}}(f)$$

となることより、

$$A_{\mathbb{R}}(f) = p\mathbb{N} \cup q\mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

である。

□

3.3 簡約化を通した福井不変量の計算公式

この節では ([6]) の中で与えられている、簡約化を通した福井不変量の計算公式を紹介する。([6]) では専門家向けに非常に短い証明が与えられているが、本節では詳しい証明を与える。

まずは準備として新しい概念を定義する。

定義 3.3.1 $\mathbb{R}^2$ の中にある開集合 U から $\mathbb{R}$ への実解析関数 $f(x)$ が $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ において**正規交叉 (normal crossing)** であるとは、x^* の近傍で x^* を原点とする座標系 $y = (y_1, y_2)$ と非負の自然数 k_1, k_2(ただし、$k_1 \neq 0$ または $k_2 \neq 0$) が存在して、

$$f(y) = a(y) y_1^{k_1} y_2^{k_2}$$

と書けることである。ここで、$a(y)$ は U 上で $|a(y)| > 0$ を満たすある実解析関数である。一般の n 変数実解析関数に対しても同様に正規交叉の概念が定義される。

次に解析関数芽の零点集合の簡約化を定義する。

定義 3.3.2 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ とし、$f:(\mathbb{K}^2,O)\to(\mathbb{K},0)$ を恒等的に零ではない解析関数芽とする。X を、$\mathbb{C}^2$ を有限回一点ブローアップして得られる滑らかな複素曲面とする。また、$x\in X$ **を通る弧**によって、複素解析写像 $\lambda:(\mathbb{C},0)\to(X,x)$, $(\lambda(0)=x)$ を表すことにする。このとき、$\Pi:(X,E)\to(\mathbb{C}^2,O)$, $(E=\Pi^{-1}(O))$ を $f^{-1}(0)$ の**簡約化**といい、Π は $\mathbb{C}^2$ の有限回一点ブローアップの合成で $f\circ\Pi$ は E の各点で**正規交叉**である。つまり、各点での局所座標 (x,y) を用いて

$$f\circ\Pi(x,y)=cx^ay^b,\ (c\neq 0,a\geq 0,b\geq 0)$$

と表されるものとする。このような簡約化の存在は ([5]) によって保証されている。

定義3.3.2における E のことを**例外集合**または、**例外因子**と呼ぶ。ここで、$D=(f\circ\Pi)^{-1}(0)_{red}$, $D=D_1\cup\ldots\cup D_s$ を D の既約分解とする。ここで、red は被約 $(reduced)$ のことである。これは例えば D 上の点で局所的に

$$f\circ\Pi(x,y)=cx^ay^b,\ (c\neq 0,\ a\geq 1,b\geq 1)$$

のとき、$D=(xy)^{-1}(0)$ とみなして、$D=x^{-1}(0)\cup y^{-1}(0)$ を意味する。我々は E の周りでの**零因子** $D_1,\ldots,D_s$ に関心を持っているので、

$$E\cap D_i\neq\emptyset,\ (i=1\ldots s)$$

と仮定してよい。よって、$I=\{i_1,\ldots,i_p\}\subset S=\{1,\ldots,s\}$, に対し、$S$ における I の補集合を $\{j_1,\ldots,j_q\}$, $p+q=s$ と表し、

$$D_I=(D_{i_1}\cap\ldots\cap D_{i_p})\setminus(D_{j_1}\cup\ldots\cup D_{jq})$$

とおく。

f の簡約化 $\Pi:(X,E)\to(\mathbb{C}^2,O)$, に対し、$C=\{I:D_I\cap E\neq\emptyset\}$ とおく。このとき、次が成り立つ。

命題 3.3.3 $\cup_{I\in C}I=S$ である。

証明　まず、$\cup_{I\in C}I\subset S$ を示す。任意の $I\in C$ に対し、$I\subset S$ である。よって $\cup_{I\in C}I\subset S$ である。

次に、$S\subset\cup_{I\in C}$ を示す。S の元である任意の正の整数 i に対し、$D_i\cap E\neq\phi$ であるから、$i\in I$ となる $I\in C$ が存在する。ゆえに、$i\in\cup_{I\in C}I$ となる。したがって、$S\subset\cup_{I\in C}I$ である。

以上より、$\cup_{I\in C}I = S$ が示された。

$\square$

注意 3.3.4 適当な Π を選ぶことによって（必要ならブローアップを続けることによって), E も正規交叉していると仮定できる。このとき、E はいくつかの D_i の和集合である。また、$I \in C$ かつ、$I \subset J \subset S$ ならば、$J \in C$ である。なぜならば、$D_I \cap E \neq \emptyset$, $D_I \subset D_J$ である。したがって、$D_J \cap E \neq \emptyset$ となるので､$J \in C$ である。

定義 3.3.5 各因子 D_i の**重複度** m_i は D_i のジェネリックな点での $f \circ \Pi$ の重複度として定義する。ここで、**ジェネリック**な点とは、D_i 上の点でほかの因子 D_j $(j \neq i)$ と交わらない点を意味している。

$I = \{i_1, \ldots, i_p\} \in C$ に対し、

$$\Omega_I(f) = (m_{i_1}\mathbb{N} + \ldots + m_{i_p}\mathbb{N}) \cup \{\infty\}$$

とおく。これは $C_I \cap E$ の点を通る X 上の解析弧 λ^* に対する $f \circ \lambda$ の位数全体の集合に他ならない。ここで、λ^* は $O \in \mathbb{C}^2$ を通る解析弧 λ の持ち上げ、つまり、$\Pi \circ \lambda^* = \lambda$ となるもので、

$$(f \circ \Pi) \circ \lambda^* = f \circ \lambda$$

となるものを考えている。

次に、$\mathbb{R}$ の場合を考える。$\mathbb{C}$ の場合と同様に、広中の特異点解消定理を用いて簡約化する。このとき、**簡約化、例外集合、例外因子**は

$$\Pi : (\tilde{\alpha}^{\mathbb{R}}, E^{\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R}^2, O),\ E^{\mathbb{R}} = \Pi^{-1}(O),\ D_I^{\mathbb{R}}\ (I \in C^{\mathbb{R}})$$

であり、**重複度** $m_i^{\mathbb{R}}$ と $\Omega_I(f)$ も同様に定義される。更に、強変換も $\mathbb{C}$ の場合と同様に考えられる。

定理 3.3.6 $f : (\mathbb{K}^2, O) \to (\mathbb{K}, 0)$ を解析関数芽､$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{K} = \mathbb{C}$、$\Pi : (X, \Pi^{-1}(O)) \to (\mathbb{K}^2, O)$ を $f^{-1}(0)$ の簡約化とする。このとき、

$$A_{\mathbb{K}}(f) = \bigcup_{I\in C} \Omega_I(f)$$

である。

証明　定理を示すためには、$\infty \in A_{\mathbb{K}}(f)$ より

$$A_{\mathbb{K}}(f) \setminus \{\infty\} = \cup_{I \in C} \Omega_I(f) \setminus \{\infty\}$$

を示せば十分である。

$k \in A_{\mathbb{K}}(f) \setminus \{\infty\}$ とする。解析弧 $\lambda : (\mathbb{K}, 0) \to (\mathbb{K}^2, O)$ で $O(f \circ \lambda) = k$ となるものが存在する。このとき、λ の Π による持ち上げ $\mu : (\mathbb{K}, 0) \to (X, \Pi^{-1}(O))$ が存在する。

ξ を μ の像と E との唯一の共通点とする。これは唯一の D_I, $(I = \{i_1, \ldots, i_p\},\ p = 1, 2)$ に属している。$\xi \in E$ ならば $I \in C$ は明らかである。ξ での局所座標 (x, y) で

$$f \circ \Pi(x, y) = x^l y^m$$

となり、μ は以下の式で与えられるものが存在する。

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 t^{a_1} + \alpha_2 t^{a_2} + \ldots \ (\text{ただし、}\alpha_1 \neq 0,\ 0 < a_1 < a_2 < \ldots) \\ y &= \beta_1 t^{b_1} + \beta_2 t^{b_2} + \ldots \ (\text{ただし、}\beta_1 \neq 0,\ 0 < b_1 < b_2 < \ldots) \end{aligned}$$

$\{l, m\}$ で 0 でないものの集合は $\{m_{i1}, \ldots, m_{ip}\}$ と一致するから、

$$k = O(f \circ \lambda) = O(f \circ (\Pi \circ \mu)) = O((f \circ \Pi) \circ \mu) = a_1 l + b_1 m \in \Omega_I(f)$$

である。したがって、

$$A_{\mathbb{K}}(f) \setminus \{\infty\} \subset \bigcup_{I \in C} \Omega_I(f) \setminus \{\infty\}$$

が成り立つ。

逆を示すために、$I = \{i_1, \ldots, i_p\} \in C,\ (p = 1, 2)$ とする。$p = 2$ のときのみを示す。$D_{i_1}, D_{i_2},$ の重複度を l, m とする。ここで、$k \in \Omega_I(f) \setminus \{\infty\}$ とすると、$k = al + bm\ (a, b \in \mathbb{N})$ と表される。

$\xi = D_{i_1} \cap D_{i_2}$ での局所座標形 (x, y) で $f \circ \Pi(x, y) = x^l y^m$,解析弧 $\mu : (\mathbb{K}, 0) \to (X, \xi), \mu(t) = (t^a, t^b)$ とし、$\lambda : (\mathbb{K}, 0) \to (\mathbb{K}^2, O)$ を$\lambda(t) = \Pi \circ \mu(t)$ と定義すると、λ は解析弧で、

$$f \circ \Pi \circ \mu(t) = t^{al+bm} = t^k$$

である。よって、

$$k = O(f \circ \Pi \circ \mu) = O(f \circ \lambda) \in A_{\mathbb{K}}(f) \setminus \{\infty\}$$

である。

$p=1$ のときも同様に

$$\Omega_I(f)\setminus\{\infty\}\subset A_{\mathbb{K}}(f)\setminus\{\infty\}$$

が示される。したがって、

$$\bigcup_{I\in C}\Omega_I(f)\setminus\{\infty\}\subset A_{\mathbb{K}}(f)\setminus\{\infty\}$$

が成り立つ。

以上より、

$$A_{\mathbb{K}}(f)\setminus\{\infty\}=\bigcup_{I\in C}\Omega_I(f)\setminus\{\infty\}$$

が示された。

□

注意 3.3.7 定理3.3.6は一般の n 変数の場合にも成り立つ。証明は2変数の場合と同様である

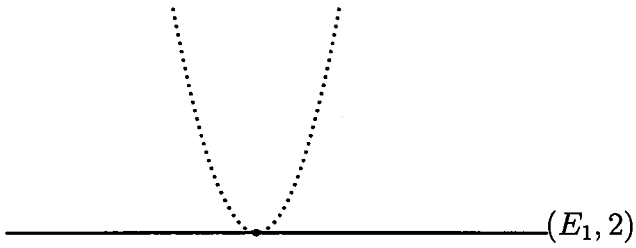
定理3.3.6で簡約化を通した福井不変量の計算公式を与えた。この簡約化からの情報を得る上で役に立つのが**特異点解消ツリー** (resolution tree) である。次に、$f(x,y)=x^2-y^3$ という簡単な関数を用いて、ツリーの描き方を説明する。

例 3.3.8 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし、$f:(\mathbb{K}^2,O)\to(\mathbb{K},0)$ を $f(x,y)=x^2-y^3$ で定義される多項式関数とする。ここで、$Z=f^{-1}(0)$ とおく。

(第1段階) f は原点 $O\in\mathbb{K}^2$ で特異点を持つので、原点ブローアップ $\Pi_1:M_1\to\mathbb{K}^2$ を考える。このとき、x^2 の次数の方が y^3 の次数より低いので、f のブローアップ後の関数 $F_1=f\circ\Pi_1$ を考えるとき、$\Pi_1(X,Y)=(XY,Y)$ で表される座標近傍 $U_1=\mathbb{K}^2$ 上で観ることにする。

$$F_1(X,Y)=f(XY,Y)=Y^2(X^2-Y)$$

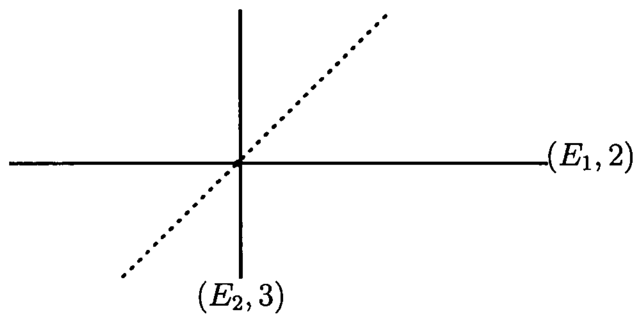
このとき、Π_1 による Z の強変換 (同じ Z を用いる) は $X^2-Y=0$ で与えられ、Π_1 による例外集合 E_1 は $Y^2=0$ で与えられる。第1段階のツリーとして、$F_1^{-1}(0)=Z\cup E_1$ を $U_1=\mathbb{K}^2$ 上に描く。($\mathbb{K}=\mathbb{C}$ のとき、$\mathbb{C}^2$ は実4次元でそのままではツリーを描くことができない。従って、実の場合のツリーで代用する。ただし、虚部に消えて実部に現れない曲線がある場合はそのことを考慮して、それらの曲線も実の場合のツリー上に書き加えている。)



(第2段階) 第1段階の E_1 と Z は $O \in U_1 = \mathbb{K}^2$ で接しており、正規交叉していない。従って、$O \in U_1 \subset M_1$ でのブローアップ $\Pi_2 : M_2 \to M_1$ を考える。このとき、強変換 Z の定義式の $X^2 - Y$ の X の次数は Y の次数よりも高いので、$F_1 = f \circ \Pi_1$ のブローアップ後の関数 $F_2 = F_1 \circ \Pi_2 = (f \circ \Pi_1) \circ \Pi_2$ を考えるとき、$\Pi_2(X, Y) = (X, XY)$ で表される座標近傍 $V_2 = \mathbb{K}^2$ 上で観ることにする。

$$F_2(X, Y) = F_1(X, XY) = X^3 Y^2 (X - Y)$$

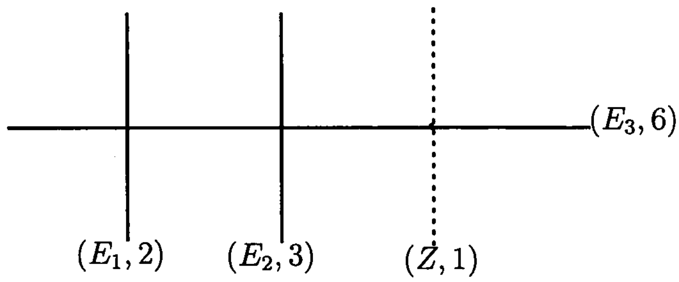
このとき、$\Pi_2 \circ \Pi_1$ による Z の強変換 (同じ Z を用いる) は $X - Y = 0$ で与えられ、例外因子 E_1 は $Y^2 = 0$, Π_2 による例外集合 E_2 は $X^3 = 0$ で与えられる。第2段階のツリーとして、$F_2^{-1}(0) = Z_2 \cup E_1 \cup E_2$ を $V_2 = \mathbb{K}^2$ 上に描く。



(第3段階) 第2段階の E_1, E_2 と Z は $O \in V_2 = \mathbb{K}^2$ で正規交叉していない。従って、$O \in V_2 \subset M_2$ でのブローアップ $\Pi_3 : M_3 \to M_2$ を考える。このとき、強変換 Z の定義式の $X - Y$ の X の次数と Y の次数は等しいので、$F_2 = f \circ \Pi_1 \circ \Pi_2$ のブローアップ後の関数 $F_3 = F_2 \circ \Pi_3 = (f \circ \Pi_1 \circ \Pi_2) \circ \Pi_3$ を考えるとき、U_3, V_3 のどちらの座標近傍上で考えても大きな違いはない。ここでは、$F_2 = f \circ \Pi_1 \circ \Pi_2$ のブローアップ後の関数 $F_3 = F_2 \circ \Pi_3 = (f \circ \Pi_1 \circ \Pi_2) \circ \Pi_3$ を考えるとき、$\Pi_3(X, Y) = (XY, Y)$ で表される座標近傍 $U_3 = \mathbb{K}^2$ 上で観ることにする。

$$F_3(X, Y) = F_2(XY, Y) = X^3 Y^6 (Y - 1)$$

このとき、$\Pi_3 \circ \Pi_2 \circ \Pi_1$ による Z の強変換(同じ Z を用いる)は、$Y-1=0$ で与えられ、例外因子 E_2 は $X^3=0, \Pi_3$ による例外因子 E_3 は $Y^6=0$ で与えられる。例外因子 E_1 は U_3 上の無限大に飛んでいて現れない。第3段階のツリーとして、$F_3^{-1}(0)=Z\cup E_2\cup E_3$ を $U_3=\mathbb{K}^2$ 上に描き、E_1 を U_3 の無限大に近い所に、E_3 に正規交叉するように描く。第3段階において、Z は滑らかで、$Z\cup E_1\cup E_2\cup E_3$ は正規交叉しているので、F_3 は f の簡約化を与えている。我々はこの第3段階のツリーを重複度も込みで f の**特異点解消ツリー** (resolution tree) と呼ぶ。



定理3.3.6の計算公式を用いた福井不変量の計算例を挙げておく。

例 3.3.9 $f:(\mathbb{K}^2, O)\to(\mathbb{K}, 0)$ を

$$f(x,y)=x^4-y^4$$

とする。
(1) $\mathbb{R}$ 上の既約分解は、

$$f(x,y)=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$$

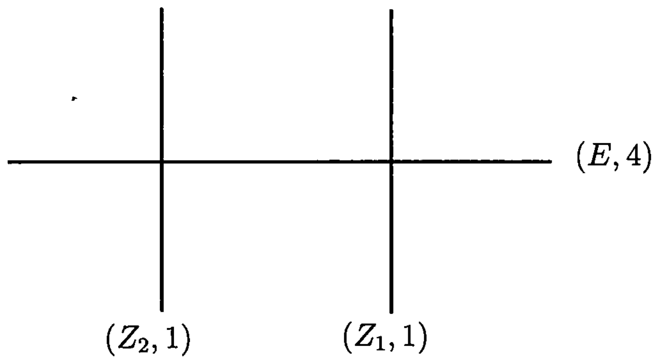
となる。$\Pi: m\to\mathbb{R}^2$ を原点ブローアップ、$E=\Pi^{-1}(O)$ をその例外集合とする。2章で見たように、M は2つの座標近傍で覆われるが、その一つを用いて

$$\Pi(X,Y)=(XY,Y)$$

とすると、

$$\begin{aligned} f\circ\Pi(X,Y) &= X^4Y^4-Y^4 \\ &= Y^4(X^4-1) \\ &= Y^4(X+1)(X-1)(X^2+1) \end{aligned}$$

であるから、特異点解消ツリーは以下のものになる。



以上より、$A_{\mathbb{R}}(f)=\mathbb{N}_{\geq 4}\cup\{\infty\}$ である。

(2) $\mathbb{C}$ 上の既約分解は、

$$f(x,y)=(x-y)(x+y)(x+iy)(x+iy)$$

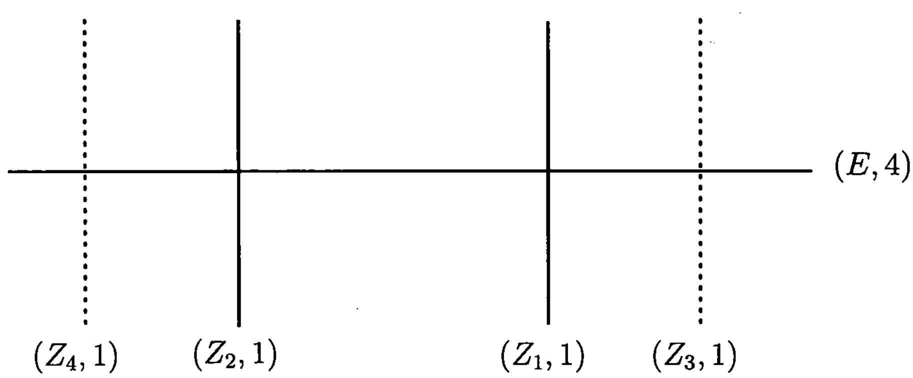
となる。$\Pi: m\to\mathbb{C}^2$ を原点ブローアップとし、$E=\Pi^{-1}(O)$ をその例外集合とする。上と同様に、

$$\Pi(X,Y)=(XY,Y),\ E=\pi^{-1}(O)=(0,0)$$

とすると、

$$\begin{aligned} f\circ\Pi(X,Y) &= X^4Y^4-Y^4 \\ &= Y^4(X^4-1) \\ &= Y^4(X+1)(X-1)(X^2+1) \\ &= Y^4(X+1)(X-1)(X+i)(X-i) \end{aligned}$$

であるから、特異点解消ツリーは以下のものになる。



以上より、$A_{\mathbb{C}}(f) = \mathbb{N}_{\geq 4} \cup \{\infty\}$ である。

注意 3.3.10 $\mathbb{R}$ の場合には、$f_j^{-1}(0) = \{(0,0)\}$ のとき、強変換 $Z_j = \emptyset$ となること、一方、$\mathbb{C}$ の場合には、$Z_j = \emptyset$ となることはないことに注意する。

この節の最後に、定理 3.3.6 の集合論への応用を述べる。

命題 3.3.11 自然数 $p, q \in \mathbb{N}$ に対し、

$$p\mathbb{N} + q\mathbb{N} = (p+q)\mathbb{N} \cup (p\mathbb{N} + (p+q)\mathbb{N}) \cup (q\mathbb{N} + (p+q)\mathbb{N})$$

である。

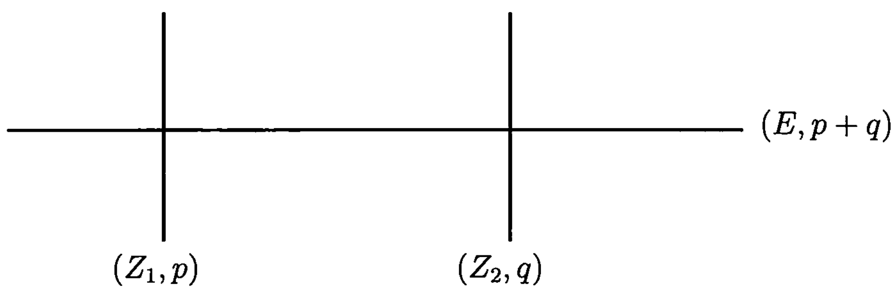
(福井不変量を用いる証明)

証明　関数 $f : (\mathbb{R}^2, O) \to (\mathbb{R}, 0)$ を $f(x,y) = x^p y^q$ とすると、f は既に正規交叉になっているので、定理 3.3.6 より、

$$A_{\mathbb{R}}(f) = (p\mathbb{N} + q\mathbb{N}) \cup \{\infty\}$$

である。

一方、f の簡約化を行うと、特異点解消ツリーは以下のものとなる。



定理 3.3.6 より、

$$A_{\mathbb{K}}(f) = (p+q)\mathbb{N} \cup (p\mathbb{N} + (p+q)\mathbb{N}) \cup (q\mathbb{N} + (p+q)\mathbb{N}) \cup \{\infty\}$$

となる。以上より、命題が従う。

□

(集合論的証明)

証明　まず、$p\mathbb{N}+q\mathbb{N}\supset(p+q)\mathbb{N}\cup(p\mathbb{N}+(p+q)\mathbb{N})\cup(q\mathbb{N}+(p+q)\mathbb{N})$ であることを示す。任意の $m,n\in\mathbb{N}$ に対し、次が成り立つ。

$$(p+q)\mathbb{N}\ni(p+q)m\Rightarrow pm+qm\in p\mathbb{N}+q\mathbb{N}$$

$$(p+q)\mathbb{N}+p\mathbb{N}\ni(p+q)m+pn\Rightarrow p(m+n)+qm\in p\mathbb{N}+q\mathbb{N}$$

$$(p+q)\mathbb{N}+q\mathbb{N}\ni(p+q)m+pn\Rightarrow pm+(m+n)q\in p\mathbb{N}+q\mathbb{N}$$

である。したがって、

$$p\mathbb{N}+q\mathbb{N}\supset(p+q)\mathbb{N}\cup(p\mathbb{N}+(p+q)\mathbb{N})\cup(q\mathbb{N}+(p+q)\mathbb{N})$$

が成り立つ。

次に、$p\mathbb{N}+q\mathbb{N}\subset(p+q)\mathbb{N}\cup(p\mathbb{N}+(p+q)\mathbb{N})\cup(q\mathbb{N}+(p+q)\mathbb{N})$ であることを示す。$p\mathbb{N}+q\mathbb{N}\ni pm+qn$ とする。m,n の大小関係により場合分けする。

(I) $m=n$ のとき

$pm+qn=(p+q)m\in(p+q)\mathbb{N}$ である。

(II) $m>n$ のとき

$pm+qn=(p+q)n+p(m-n)\in(p+q)\mathbb{N}+p\mathbb{N}$ である

(III) $m<n$ のとき

$pm+qn=(p+q)m+q(n-m)\in(p+q)\mathbb{N}+q\mathbb{N}$ である。

従って、

$$p\mathbb{N}+q\mathbb{N}\subset(p+q)\mathbb{N}\cup(p\mathbb{N}+(p+q)\mathbb{N})\cup(q\mathbb{N}+(p+q)\mathbb{N})$$

である。

以上より、命題が従う。

□

上のような命題は、多項式関数を考えることによりいくらでも構成できる。それらは、福井不変量の計算公式を用いることにより、形式的な操作で容易に示される。

3.4 福井不変量の計算公式を用いるうえでの技巧

$f:(\mathbb{K}^2,O)\to(\mathbb{K},0)$ を解析関数芽、$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とするとき、$f(x,y)$ の既約分解を

$$f(x,y)=\prod_{j=1}^{k} f_j(x,y)^{s_j}$$

と表すこととする。m_i を E_i の重複度、$(1\le i\le N)$ とし、s_j を Z_j の重複度、$(1\le j\le k)$ とする。任意の E_i をとる。

$$\Delta(P_i)=m_i\mathbb{N},\ \Delta_G=\bigcup_{i=1}^{N}\Delta(P_i)$$

とおく。次に、任意の対 (E_i,E_j) ただし、$E_i\cap E_j\neq\emptyset$ をとる。$H_{ij}=E_i\cap E_j$ とする。

$$\Delta_H=\bigcup_{(i,j)}(m_i\mathbb{N}+m_j\mathbb{N})$$

とおく。ただし、この和集合の和は $E_i\cap E_j\neq\emptyset$ となる対 (i,j) 全体を亘る。

次に、任意の強変換 Z_j をとると、Z_j はある一つの例外因子 $E_{n(j)}$ と交わる。このとき、

$$\Delta_S=\bigcup_{j=1}^{k}(s_j\mathbb{N}+m_{u(j)}\mathbb{N})$$

とおく。以上の準備のもとに、$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ のとき、定理3.3.6は次のように言い換えられる。

定理 3.4.1

$$A_{\mathbb{C}}(f)=\Delta_G\cup\Delta_H\cup\Delta_S\cup\{\infty\}$$

である。

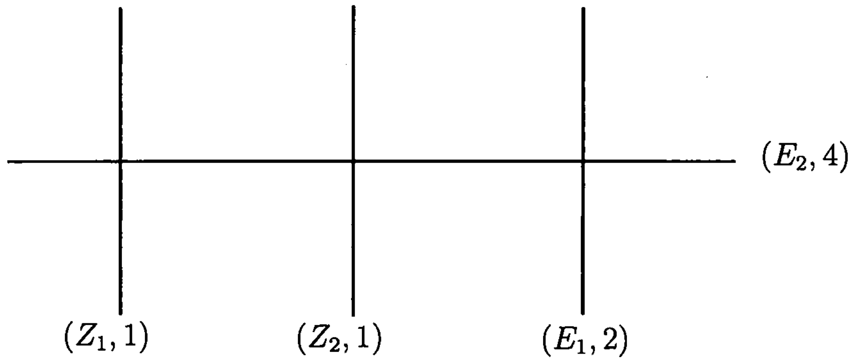
例 3.4.2 $f:(\mathbb{C}^2,O)\to(\mathbb{C},0)$ を

$$f(x,y)=x^2-y^4=(x-y^2)(x+y^2)$$

とする。このとき、一点ブローアップを用いて $f^{-1}(0)$ の簡約化を行う。そのために、

$$F_1(X,Y)=f(XY,Y)=X^2Y^2-Y^4$$
$$F_2(X,Y)=F_1(XY,Y)=Y^4(X^2-1)$$

とする。このとき特異点解消ツリーは次のようになり、最初の例外集合 $(E_1,2)$ は F_2 の式には表れないが無限大に現れている。（言い換えると、無限大に飛んでいる）。



ここで、特異点解消ツリーが次を与える。

$$\Delta(P_1)=2\mathbb{N},\ \Delta(P_2)=4\mathbb{N},\ \Delta_H=2\mathbb{N}+4\mathbb{N},\ \Delta_s=4\mathbb{N}+\mathbb{N}$$

よって、

$$A_{\mathbb{C}}(f)=\{2,4,5,6,7,\dots\}\cup\{\infty\}$$

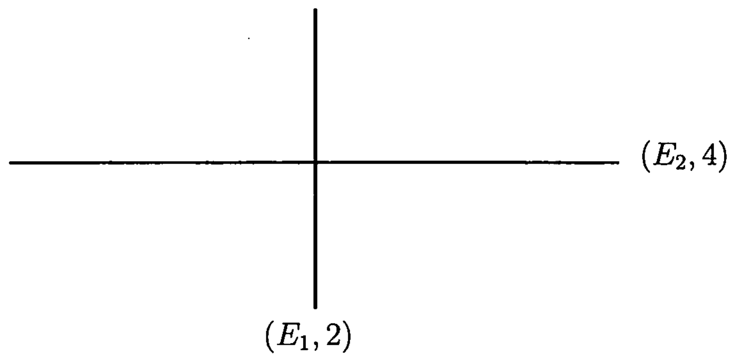
である。

$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ のとき $f(x,i^{\frac{1}{2}}y)=x^2+y^4=g(x,y)$ で f と g は線形同値である。したがって、$A_{\mathbb{C}}(g)=A_{\mathbb{C}}(f)$ である。

一方、$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ のとき、$g(x,y)=x^2+y^4$, $g^{-1}(0)=\{O\}$ である。g の簡約化を上と同様に考える。

$$G_1(X,Y)=g(XY,Y)=Y^2(X^2+Y^2)$$
$$G_2(X,Y)=G_1(XY,Y)=Y^4(X^2+1)$$

とする。このとき、特異点解消ツリーは次のようになる。



g の特異点解消ツリー $A_{\mathbb{R}}(g)$ は $A_{\mathbb{C}}(g)$ とは異なる。しかし、$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ のときも定理3.4.1は成り立っている。

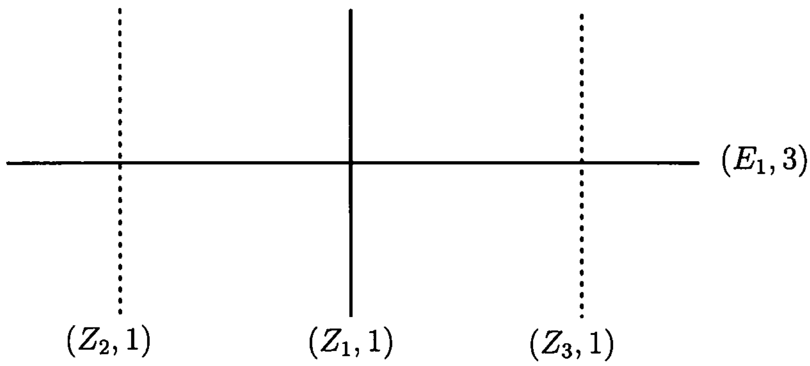
もし、$f_j^{-1}(0)=\{O\}$ ならば実の**強変換** (strict transform) $Z_j=\emptyset$ であるから Δ_s は適切に解釈されるべきである。例えば、

$$f(x,y)=x(x^2+y^2)$$

これをブローアップして、

$$F_1(X,Y)=f(XY,Y)=XY^3(X^2+1)$$

よって、特異点解消ツリーは次の通りである。



X^2+1 の交点は複素平面に消えている。このようなものは計算に入れない。$f_j^{-1}(0)\neq\{O\}$ となるのに対して、強変換 Z_j はある $E_{u(j)}$ と実平面上の点と交わる。このとき、

$$\Delta_S^{\mathbb{R}}=\cup_j(s_j\mathbb{N}+m_{u(j)}\mathbb{N})$$

とおく。ただし、和集合の和は $f_j^{-1}(0)\neq\{O\}$ となる全ての j を亘る。

実の場合の定理は、複素の場合の3.4.1において Δ_S を $\Delta_{\mathbb{S}}^{\mathbb{R}}$ に置き換えて得られる。即ち、次の定理が成り立つ。

定理 3.4.3 $A_{\mathbb{R}}=\Delta_G\cup\Delta_H\cup\Delta_S^{\mathbb{R}}\cup\{\infty\}$

例 3.4.4 定理3.4.3を用いて実の場合の例を計算する。
(1) $g(x,y)=x^2+y^4$ のとき

$$\Delta_G = 2\mathbb{N}\cup 4\mathbb{N} = 2\mathbb{N},\ \Delta_H = 2\mathbb{N}+4\mathbb{N}\subset 2\mathbb{N}$$

で、$\Delta_S^{\mathbb{R}}$ は考える必要がない。よって、

$$A_{\mathbb{R}}(f) = 2\mathbb{N}\cup\{\infty\}$$

である。
(2) $f(x,y)=x(x^2+y^2)$ のとき、

$$\Delta_G = 3\mathbb{N},\ \Delta_S^{\mathbb{R}} = \mathbb{N}+3\mathbb{N}$$

で、Δ_H は考える必要がない。このとき、

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{R}}(f) &= 3\mathbb{N}\cup(\mathbb{N}+3\mathbb{N})\cup\{\infty\} \\ &= \{3,4,\ldots\}\cup\{\infty\} \end{aligned}$$

である。

この例の場合、$A_{\mathbb{R}}(f)$ の定義に基づく計算のほうが簡単である。実際 $m\in\mathbb{N}$ として、$\lambda(t)=(t^m,t)$ とすると、

$$f\circ\lambda(t) = t^{m+2}+t^{3m}$$

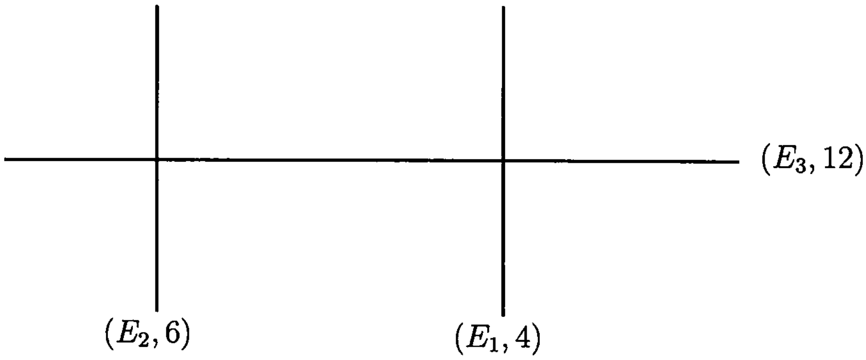
であるから、$A_{\mathbb{R}}(f)\supset\{3,4,5,\ldots\}$ である。また、$A_{\mathbb{R}}\not\ni 1,2$ は明らかより、

$$A_{\mathbb{R}}(f) = \{3,4,5,\ldots\}\cup\{\infty\}$$

となる。このように定義に基づいた計算のほうが簡単の場合もありうるので、定理3.4.1や3.4.3を用いる際には注意が必要である。
(3) $f(x,y)=x^4+y^6$ のとき、

$$\begin{aligned} F_1(X,Y) &= f(XY,Y) = Y^4(X^4+Y^2) \\ F_2(X,Y) &= F_1(X,XY) = X^6y^4(X^2+Y^2) \\ F_3(X,Y) &= F_2(XY,Y) = X^6Y^{12}(X^2+1) \end{aligned}$$

とする。



$$
\begin{aligned}
\Delta_G &= 4\mathbb{N} \cup 6\mathbb{N} \\
\Delta_H &= (4\mathbb{N} + 12\mathbb{N}) \cup (6\mathbb{N} + 12\mathbb{N}) \subset 4\mathbb{N} \cup 6\mathbb{N}
\end{aligned}
$$

で、$\Delta_S^{\mathbb{R}}$ は考える必要がない。よって、

$$A_{\mathbb{R}}(f) = 4\mathbb{N} \cup 6\mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

である。

この例の場合、定義による計算は大変手間である。興味がある方は $A_{\mathbb{R}}(f)$ の定義に基づく計算をし、比較してみてほしい。

第4章　安定的区間状

この章では [6] で紹介されている福井不変量に現れる整数論的性質である「安定的に周期的」と「安定的区間状」について述べることにする。

4.1　安定的に周期的

この節では、福井不変量によく現れる性質の一つである安定的に周期的に関する性質を述べる。

定義 4.1.1 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし、$f:(\mathbb{K}^2,O)\to(\mathbb{K},0)$ を恒等的に 0 ではない解析関数芽とする。f の福井不変量を

$$A_{\mathbb{K}}(f)=\{a_1,a_2,\ldots\}\cup\{\infty\},\ a_1<a_2<\ldots<a_i<\ldots(i\in\mathbb{N})$$

とする。このとき、 $c,q,d\in\mathbb{N}$ で

$$a_{j+kq}=a_j+kd\ (c\leq j<c+q,\ k\in\mathbb{N})$$

を満たすものが存在するとき、$A_{\mathbb{K}}(f)$ を安定的に周期的であるという。この式を満たす最小の q を安定周期と呼ぶ。さらに、 $c,d,m\in\mathbb{N}$ で

$$a_{mi}=c+id,i=0,1,2,\ldots$$

を満たすものが存在するとき、$A_{\mathbb{K}}(f)$ を安定的区間状という。特に、$d=1$ であるとき、$A_{\mathbb{K}}(f)$ を安定的単位区間状と呼ぶ。

例 4.1.2 $f(x,y)=x^4+y^6$ とする。実の場合の福井不変量は例 3.1.7 で計算している。
(1) 実数の場合

$$A_{\mathbb{R}}(f)=\{4,6,8,12,16,18,20,24,28,30,32,36,\ldots\}\cup\{\infty\}$$

である。よって、$c=4, q=4, d=12$ で安定的に周期的である。しかし、$A_{\mathbb{R}}(f)$ は安定的区間状ではない。
(2) 複素数の場合

$$A_{\mathbb{C}}(f)=\{4,6,8,12,13,14,15,\ldots\}\cup\{\infty\}$$

である。よって、$c=12, q=1, d=1$ で安定的に周期的である。また $A_{\mathbb{C}}(f)$ は安定的単位区間状である。

例 4.1.3 $f(x,y)=x^2$ とする。$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ に対し、

$$A_{\mathbb{K}}(f)=\{2,4,6,8,\ldots\}\cup\{\infty\}$$

である。よって、$c=2, q=1, d=2$ で安定的に周期的である。更に、$A_{\mathbb{C}}(f)$ は安定的区間状であるが、安定的単位区間状ではない。

上記の例より、福井不変量は常に安定的に周期的であるように思われる。これが正しいことを以下に示す。
安定的区間状という性質は、次のように言い換えることができる。

補題 4.1.4 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ に対し、$A_{\mathbb{K}}(f)$ が安定的区間状であることの必要十分条件は $s,d,m\in\mathbb{N}$ で $a_{m+i}=(s+i)d,\ (i\in\mathbb{Z}, i\geq 0)$ を満たすものが存在することである。

証明　まず、$a_{m+i}=(s+i)d$ とする。このとき、

$$a_{m+i}=(s+i)d=sd+id\quad(i\in\mathbb{Z}, i\geq 0)$$

より、$c=sd$ として安定的区間状である。
逆に、$A_{\mathbb{K}}(f)$ が安定的区間状であるとすると、定義 4.1.1 より

$$a_{m+i}=c+id\ (i\in\mathbb{Z}, i\geq 0)$$

を満たす $c,d,n\in\mathbb{N}$ が存在する。

$$a_m=c\in A_{\mathbb{K}}(f)$$

と $A_{\mathbb{K}}(f)$ の定義 4.1.1 より、$2c\in A_{\mathbb{K}}(f)$ は、ある $s\in\mathbb{N}$ に対して、$2c=a_{m+s}$ と表されるから、

$$2c=a_{m+s}=c+sd$$

となる。よって、 $c = sd$ である。従って、

$$a_{m+i} = c + id = (s+i)d$$

と表される。

□

系 4.1.5 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ に対し、福井不変量 $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的に周期的である。

証明　定理 3.3.6 より福井不変量は

$$A_{\mathbb{K}}(f) = \bigcup_{I \in C} \Omega_I(f)$$

と表された。ただし、$I = \{i_1, \ldots, i_p\} \in C$ に対し、

$$\Omega_I(f) = \{m_i \mathbb{N}_1 + \ldots + m_{ip} \mathbb{N}\} \cup \{\infty\}$$

である。$d_I = g.c.d\{m_i, \ldots, m_{ip}\}$ とおくと、補題 4.2.3 と命題 1.2.9 より、$\Omega_I(f)$, $(\Omega_I(f) \setminus \{\infty\})$ は安定的区間状になる。$A_{\mathbb{K}}(f)$ は $\Omega_I(f)$ の有限個の和集合より、安定的に周期的である。

□

4.2　安定的区間状

前節の例で見たように、複素関数の福井不変量で安定的区間状にならないものを見つけることはそれほど容易なことではない。ここでは、[6] で与えられている斉次多項式の例を紹介する。

命題 4.2.1 $f : (\mathbb{C}^2, O) \to (\mathbb{C}, 0)$, を

$$f(x, y) = (x-y)^2 (x-2y)^3 (x-3y)^3 (x-4y)^4$$

で定義される複素多項式関数とする。このとき、f の福井不変量は、

$$A_{\mathbb{C}}(f) = 12\mathbb{N} \cup \{12 + 2p \mid p \in \mathbb{N}\} \cup \{12 + 3p \mid p \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\}$$

である。これは、

$$A_{\mathbb{C}}(f) = ((2\mathbb{N} \cup 3\mathbb{N}) \cap \mathbb{N}_{\geq 12}) \cup \{\infty\}$$

とも表される。よって $A_{\mathbb{C}}(f)$ は

$$A_{\mathbb{C}}(f) = \{12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 26, \dots\} \cup \{\infty\}$$

で、安定的区間状でない。

証明　$\lambda : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, O)$ 解析弧とする。このとき、$\lambda(t) = (X(t), Y(t))$ ただし、

$$X(t) = a_0t^u + a_1t^{u+1} + \dots,\ Y(t) = b_0t^v + b_1t^{v+1} + \dots$$

とする。$a_0, b_0 \neq 0$ かつ $u, v \geq 1$ のとき、$X \equiv 0$ (または $Y \equiv 0$) ならば $u = \infty$ (または、$v = \infty$) とする。また、$\lambda \equiv 0$ または、$X(t) = kY(t)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ のとき、$O(f \circ \lambda) = \infty$ となる。

次に、$\lambda \not\equiv 0$ かつ $X(t) \neq kY(t)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ のときを考える。$u < v$ のとき、$f \circ \lambda(t) = a_0^{12}t^{12u}+$(高次の項) である。したがって、$O(f \circ \lambda(t)) = 12u$ となる。よって、

$$\{O(f \circ \lambda(t)) \mid \lambda, \text{ただし}, u < v\} = 12\mathbb{N}$$

である。同様にして、$u > v$ のとき

$$\{O(f \circ \lambda(t)) \mid \lambda, \text{ただし}, u > v\} = 12\mathbb{N}$$

である。

最後に $u = v$ のときを考える。

(I) $a_0 = b_0$ のとき

$$X(t) - Y(t) = c_1t^{w+1} + c_2t^{w+2} + \dots\ (c_1 \neq 0, w \geq u)$$

$$X(t) - kY(t) = d_kt^u + \dots\ (d_k \neq 0, k = 2, 3, 4)$$

である。以上より、

$$\begin{aligned} f \circ \lambda(t) &= c_1^2t^{2(w+1)}d_2^3t^{3u}d_3^3t^{3u}d_4^4t^{4u} + (\text{高次の項}) \\ &= c_1^2d_2^3d_3^3d_4^4t^{12u+2+2(w-u)} + (\text{高次の項}) \end{aligned}$$

となる。したがって、$O(f \circ \lambda(t)) = 12u + 2\{(w - u) + 1\}$ である。よって、

$$\{O(f \circ \lambda(t)) \mid \lambda\} = \{12 + 2p \mid p \in \mathbb{N}\}$$

である。
(II) $a_0 = 2b_0$ のとき

$$\{O(f \circ \lambda(t)) \mid \lambda\} = \{12 + 3p \mid p \in \mathbb{N}\}$$

である。
(III) $a_0 = 3b_0$ のとき

$$\{O(f \circ \lambda(t)) \mid \lambda\} = \{12 + 3p \mid p \in \mathbb{N}\}$$

である。
(IV) $a_0 = 4b_0$ のとき

$$\{O(f \circ \lambda(t)) \mid \lambda\} = \{12 + 4p \mid p \in \mathbb{N}\}$$

である。
(V) 他の場合、$\{O(f \circ \lambda(t)) \mid \lambda\} = 12\mathbb{N}$ である。
以上より、

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{K}}(f) &= 12\mathbb{N} \cup \{12 + 2p \mid p \in \mathbb{N}\} \cup \{12 + 3p \mid p \in \mathbb{N}\} \cup \{\infty\} \\ &= ((2\mathbb{N} \cup 3\mathbb{N}) \cap \mathbb{N}_{\geq 12}) \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

となる。

□

上の命題において、$s_1 = 2, s_2 = 3, s_3 = 3, s_4 = 4$ とするとき、

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4,\ g.c.d(s_1, s_2, s_3, s_4) = 1$$

であり、$j = 1, 2, 3, 4$ に対して、$(s, s_j) = 1$ になるものは存在しない。
以上の考察から次の補題の定式化のヒントを得た。

補題 4.2.2 自然数 $s_1, \ldots, s_k$ に対し $s = s_1 + \ldots + s_k$, $r = g.c.d(s_1, \ldots, s_k)$ かつ $d_0 = g.c.d((s, s_1), \ldots, (s, s_k))$ とするとき、$r = d_0$ となる。

証明　$r = g.c.d(s_1, \ldots, s_k)$ より、$s_j = b_j r$ $(1 \leq j \leq k)$ であるから、$r \mid s$ である。したがって、$r \mid (s, s_j)$ $(1 \leq j \leq k)$ より、

$$r \mid g.c.d((s, s_1), \ldots, (s, s_k)) = d_0$$

である。

一方、

$$s_j = t_j(s, s_j)\ (1 \le j \le k)$$

と表される。ここで、

$$d_0 = g.c.d((s, s_1), \ldots, (s, s_k))$$

より、$(s, s_j) = m_j d_0$ と表される。よって、$s_j = t_j m_j d_0$, $(1 \le j \le k)$ となる。したがって、

$$\begin{aligned} r &= g.c.d(s_1, \ldots, s_k) \\ &= g.c.d(t_1 m_1 d_0, \ldots, t_k m_k d_0) \\ &= d_0\ g.c.d(t_1 m_1, \ldots, t_k m_k) \end{aligned}$$

となるので、$d_0 \mid r$ である。

以上より、$r = d_0$ を得る。

□

この節の後半では、福井不変量が安定的区間状になるための判定法を述べる。$f : (\mathbb{K}^2, O) \to (\mathbb{K}, 0)$ を解析関数芽とする。

$$f(x, y) = \prod_{j=1}^{k} f_j(x, y)^{s_j}$$

を $f(x, y)$ の既約分解とする。ここで、$\Pi : (X, E) \to (\mathbb{K}^2, O)$ を $f^{-1}(0)$ の簡約化とし、$E = \Pi^{-1}(0)$ は例外集合 $E_1, \ldots, E_N$ の和集合とする。m_i は E_i の重複度 $(1 \le i \le N)$、Z_j は $f_j^{-1}(0)$ の強変換、s_j はその重複度 $(1 \le i \le k)$ とする。$E_i \cap E_j \neq \emptyset$ かつ $i \neq j$ のとき、$\gamma_{ij} = (m_i, m_j)$ とおく、つまり γ_{ij} は m_i と m_j の最大公約数である。このとき、

$$\Gamma_E = \cup\{\gamma_{ij}\}$$

と定義する。和は $i \neq j$ で $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ となる対 (i, j) の組全体を亘る。強変換 Z_j がある例外因子 $E_{u(j)}$ と交わるとき、$\gamma_j = (s_j, m_{u(j)})$ とおき、

$$\Gamma_s = \cup\{\gamma_j\}$$

と定義する。$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合は Γ_s は $f_j^{-1}(0) \neq \{O\}$ となる γ_j のみからなると解釈される。

(1) $f^{-1}(0)=\{O\}$ で簡約化が 1 回のブローアップによって与えられる場合。

このとき、ツリーモデルはただ一つの例外集合からなる。ここで、m をその重複度とすると、

$$A_{\mathbb{R}}(f)=m\mathbb{N}\cup\{\infty\}$$

となる。したがって、$A_{\mathbb{R}}(f)$ は安定的区間状である。このとき、$\Gamma=\{m\}$ と定義する。

(2) $f^{-1}(0)\neq\{O\}$ または簡約化が 2 回以上のブローアップによって与えられる場合。

このとき、各例外因子は他の例外因子または強変換と交わる。つまり、$\Gamma_E\neq\emptyset$ または $\Gamma_s\neq\emptyset$ である。このとき、$\Gamma=\Gamma_E\cup\Gamma_s$ と定義する。

以上の準備をもとに、[6] で与えられた福井不変量が安定的区間状、更に安定的単位区間状になるための初等整数論的特徴付けを証明抜きに紹介する。

定理 4.2.3 d を Γ 内の数の最大公約数とする。$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ に対し、$A_{\mathbb{K}}(f)$ が安定的区間状であるための必要十分条件は $d\in\Gamma$ である。特に、$A_{\mathbb{K}}(f)$ が安定的単位区間状であるための必要十分条件は $1\in\Gamma$ である。

ここで、

$$M=\bigcup_{i=1}^{N}\{m_i\},\ M_0=\bigcup_{j=1}^{k}\{m_{u(j)}\}$$

とする。

注意 4.2.4 一般の n 変数解析関数芽の福井不変量が安定的区間状になるための初等整数論的特徴付けも [6] で与えられている。

次の 4.3 節の斉次多項式の福井不変量の安定的区間状を取り扱う上で必要になる定理 4.2.3 の系を一つ述べておく。

系 4.2.5 d_0 を Γ_s 内の数の最大公約数とする。任意の $m_i\in M\setminus M_0$ がある $\gamma_j\in\Gamma_s$ で割り切れると仮定する。このとき、$A_{\mathbb{K}}(f)$ が安定的区間状であるための必要十分条件は $d_0\in\Gamma$ である。

証明　d を Γ 内の数の最大公約数とする。任意の $m_i \in M \setminus M_0$ はある $\gamma_j \in \Gamma_s$ で割り切れるという仮定をもとに、$d_0 = d$ を示す。

$\Gamma_s \subset \Gamma$ より、d と d_0 の定義から $d \mid d_0$ $(d \leq d_0)$ である。

次に、任意の $m \in \Gamma$ に対し、$d_0 \mid m$ を示す。

(1) d_0 の定義より、任意の $m \in \Gamma_s$ に対し、$d_0 \mid m$ である。

(2) 任意の $m \in M \cap M_0$ に対し、$d_0 \mid m$ も明らかである。

(3) 任意の $m \in M \setminus M_0$ に対し、任意の $m_i \in M \setminus M_0$ がある $\gamma_j \in \Gamma_s$ で割り切れることより、ある $\gamma_j \in \Gamma_s$ で $\gamma_j \mid m$ が存在するから $d_0 \mid m$ である。

(2), (3) より、$m \in M$ に対し、$d_0 \mid m$ である。また、$m = (m_i, m_j) \in \Gamma_E$ に対し、$d_0 \mid m$ である。ただし、$E_i \cap E_j \neq \emptyset$ $(i \neq j)$ である。よって、任意の $m \in \Gamma$ に対し、$d_0 \mid m$ であるから、$d_0 \mid d$ である。

以上より、$d_0 = d$ となり、系の主張は定理 4.2.3 より従う。

$\square$

4.3　斉次多項式の福井不変量の安定的区間状

4.2 節の命題 4.2.1 で与えられた例が、複素斉次多項式の例として最適な例であることを自分自身で示すことができたので、この節でその証明を与えておく。

定理 4.3.1 2 変数複素斉次多項式の中で、福井不変量が安定的区間状にならないものの最小次数は 12 である。

系 4.3.2 次数 11 以下の 2 変数複素斉次多項式の福井不変量は安定的区間状である。

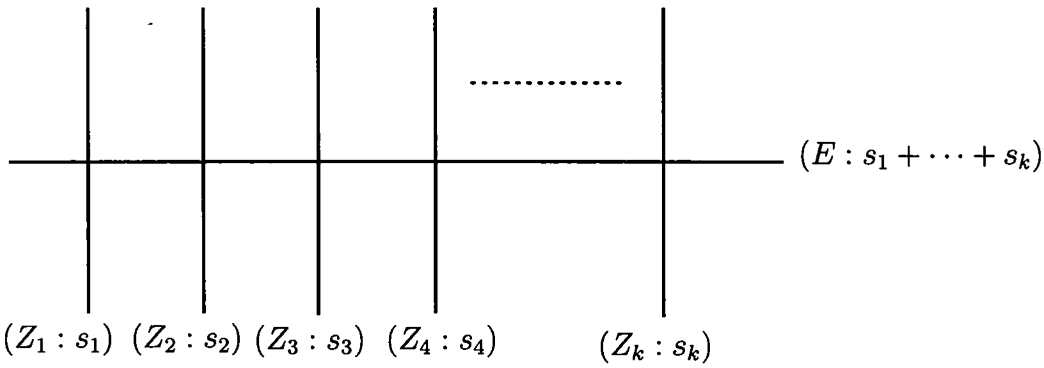
定理 4.3.1 は、系 4.3.2 と命題 4.2.1 より従うので、以下ではこの系を証明することにする。また、$f(x,y) = x^4 + y^6$ の例で見られるように、実・複素の場合を扱っていても複素の場合を念頭においていることに注意する。

命題 4.3.3 一次式に分解される斉次多項式 $f(x,y)$ を、

$$f(x,y) = (a_1x + b_1y)^{s_1} \ldots (a_kx + b_ky)^{s_k}, \quad (k \in \mathbb{N})$$

ただし、$a_ib_j \neq a_jb_i$ $(i \neq j)$, $s = s_1 + \ldots + s_k$, $r = g.c.d(s_1, \ldots, s_k)$ とおく。また、$\Gamma_s = \{(s, s_1), \ldots, (s, s_k)\}$ とすると、$A_{\mathbb{K}}(f)$ が安定的区間状であるための必要十分条件は $r \in \Gamma_s$ である。

証明　f は斉次多項式であるから、この f の特異点解消ツリーは一回のブローアップで与えられる。



(図　4.1)

このとき、$\Gamma_E = \emptyset$ である。したがって、$\Gamma = \Gamma_s$ である。

次に、$s = s_1 + \ldots + s_k$ とおくと、

$$M = M_0 = \{s\},\ M \setminus M_0 = \emptyset$$

であり、系 4.2.5 の任意の $m_i \in M \setminus M_0$ がある $\gamma_j \in \Gamma_s$ で割り切れるという仮定は自動的に満たされている。また、

$$\Gamma_s = \bigcup_{j=1}^{k} \{(s, s_j)\},\quad d_0 = g.c.d\{(s, s_1), \ldots, (s, s_k)\}$$

とおくと、系 4.2.5 より、$A_{\mathbb{K}}(f)$ が安定的区間状であるための必要十分条件は $d_0 \in \Gamma_s$ である。ここで、補題 4.2.2 より $r = d_0$ なので、$A_{\mathbb{K}}(f)$ が安定的区間状であるための必要十分条件は $r \in \Gamma_s$ である。

□

注意 4.3.4 2変数複素斉次多項式を既約分解すると、命題 4.3.3 の $f(x, y)$ のように、2変数複素1次多項式の積に分解される。

一方、2変数実斉次多項式を実多項式の範囲で分解したとき、$f(x, y) = x^2 + y^2$ のように、1次実多項式の積に分解されないものが存在することに注意する。

上の注意で述べたように、2変数複素斉次多項式を扱うとき、命題 4.3.3 のように1次式の積で表されたものを考えれば十分である。

最初に、命題 4.3.3 より次の系が導かれる。

系 4.3.5 斉次多項式

$$f(x,y) = (a_1x + b_1y)^{s_1} \ldots (a_kx + b_ky)^{s_k} \quad (k \in \mathbb{N})$$

ただし、$a_ib_j \neq a_jb_i$ $(i \neq j)$ において、$k \leq 2$ のとき福井不変量 $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。

証明　$k = 1$ のとき $f(x,y) = (a_1x + b_1y)^{s_1}$ であるから、

$$A_{\mathbb{K}}(f) = \{s_1, 2s_1, 3s_1, \ldots\} \cup \{\infty\}$$

である。よって、$A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。

次に、$k = 2$ のときを考え、

$$f(x,y) = (a_1x + b_1y)^{s_1}(a_2x + b_2y)^{s_2}$$

とする。このとき、$s = s_1 + s_2$, $r = (s_1, s_2)$ であり、$\Gamma_s = \{(s, s_1), (s, s_2)\}$ である。このことから、

$$r \mid s_1, \quad r \mid s_2, \quad r \mid s$$

が言える。従って、

$$r \mid (s, s_1), \quad r \mid (s, s_2)$$

である。以上から、$(s, s_1) = \alpha r$, $(\alpha \in \mathbb{N})$ とおける。また、$A, B \in \mathbb{N}$ で $s = s_1 + s_2 = A\alpha r$, $s_1 = B\alpha r$ とおける。よって、$B\alpha r + s_2 = A\alpha r$ となる。これを変形して $s_2 = (A - B)\alpha r$ と書ける。従って、$\alpha r \mid (s_1, s_2)$ である。また、$r = (s_1, s_2)$ より $\alpha = 1$ である。

以上より、$(s, s_1) = r$ より $r \in \Gamma_s$ となる。従って、命題4.3.3 より $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。

□

系4.3.5 より、k が2以下の場合の福井不変量 $A_{\mathbb{K}}(f)$ に安定的区間状でないものが現れないことが分かった。次に、$k = 3$ のとき $A_{\mathbb{C}}(f)$ が安定的区間状でない斉次多項式となる例が存在することを示す。

例 4.3.6 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ に対し、

$$f(x,y) = (x - y)^2(x - 2y)^3(x - 3y)^{25}$$

とする。このとき、

$$r = g.c.d(2,3,25) = 1,\ s = 2+3+25 = 30$$

である。また、

$$\begin{aligned}\Gamma_s &= \{(30,2),(30,3),(30,25)\} \\ &= \{2,3,5\}\end{aligned}$$

である。$r \notin \Gamma_s$ より、命題 4.3.3 から $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状でない。

以下、$k \geq 3,\ s \leq 11$ のときに、福井不変量 $A_{\mathbb{K}}(f)$ が安定的区間状にならないものが存在しないことを示す。そのために以下の補題を用意する。

補題 4.3.7 命題 4.3.3 の形で与えられる斉次多項式 $f(x,y)$ のおいて、ある j に対して $s_j = 1$ のとき、福井不変量 $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。

証明 $s_j = 1$ のとき、$r = 1,\ (s, s_j) = 1$ より $r \in \Gamma_s$ である。よって、命題 4.3.3 より $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。

□

補題 4.3.8 命題 4.3.3 の形で与えられる斉次多項式 $f(x,y)$ のおいて、s が素数のとき、福井不変量 $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。

証明 $k = 1$ のとき、$s = s_1$ となる。このとき、$r = s,\ \Gamma_s = \{s\}$ である。したがって、$r \in \Gamma_s$ となり命題 4.3.3 より $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。

次に、$k \geq 2$ のときを考える。s は素数であるから、$(s, s_i) = 1,\ (1 \leq i \leq k)$ となる。したがって、$\Gamma_s = \{1\}$ となり、このときも命題 4.3.3 より $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。

以上より、s が素数のとき、斉次多項式 $f(x,y)$ の福井不変量 $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。

□

上の補題を用いて命題 4.3.3 の形で与えられる斉次多項式の福井不変量の安定的区間状について考えていこう。$s \leq 11$ としたとき、$s = s_1 + \ldots + s_k$ であるから、$k \geq 6$ では必ず $s_j = 1$ となるものが存在する。したがって、補題 4.3.7 より $k \geq 6$ の場合次数 11 以下の 2 変数複素斉次多項式の福井不変量は安定的区間状である。よって系 4.3.2 を示すためには $3 \leq k \leq 5,\ s \leq 11$ の場合を調べればよい。以下では、この場合に福井不変量が安定的区間状であることを示す。

命題 4.3.9 命題 4.3.3 の形で与えられる次数 11 以下の 2 変数複素斉次多項式において、$k=3$ のとき、福井不変量は安定的区間状である。

証明　$k=3$ のとき、補題 4.3.7 と補題 4.3.8 より、$f_{\mathbb{K}}(f)$ が安定的区間状でないものを $s \leq 11$ で探すには $s=6,8,9,10$ の場合を調べればよい。
(1) s=6 のとき
$s_1=s_2=s_3=2$ より、$r=2,\ \Gamma_s=\{2\}$ であるから $r \in \Gamma_s$ である。よって、命題 4.3.3 より $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。
(2) $s=8$ のとき
このときは次の 2 通りが考えられる。
(I) $s_1=s_2=2, s_3=4$ の場合
このとき、$r=2,\ \Gamma_s=\{2,4\}$ であるから $r \in \Gamma_s$ である。よって、命題 4.3.3 より $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。
(II) $s_1=2, s_2=s_3=3$ のとき
このとき、$r=1,\ \Gamma_s=\{1,2\}$ であるから $r \in \Gamma_s$ である。よって、命題 4.3.3 より $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。
(3) $s=9$ のとき
このときは次の 3 通りが考えられる。
(I) $s_1=s_2=2,\ s_3=5$ のとき
このとき、$r=1,\ \Gamma_s=\{1\}$ であるから $r \in \Gamma_s$ である。よって、命題 4.3.3 より $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。
(II) $s_1=2, s_2=3, s_3=4$ のとき
このとき、$r=1,\ \Gamma_s=\{1,3\}$ であるから $r \in \Gamma_s$ である。よって、命題 4.3.3 より $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。
(III) $s_1=s_2=s_3=3$ のとき
このとき、$r=3,\ \Gamma_s=\{3\}$ であるから $r \in \Gamma_s$ である。よって、命題 4.3.3 より $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。
(4) $s=10$ のとき
このときは次の 4 通りが考えられる。
(I) $s_1=s_2=2,\ s_3=6$ のとき
このとき、$r=2,\ \Gamma_s=\{2\}$ であるから $r \in \Gamma_s$ である。よって、命題 4.3.3 より $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。
(II) $s_1=2, s_2=3, s_3=5$ のとき
このとき、$r=1,\ \Gamma_s=\{1,2,5\}$ であるから $r \in \Gamma_s$ である。よって、命題 4.3.3 より $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。
(III) $s_1=2,\ s_2=s_3=4$ のとき

このとき、$r=2,\ \Gamma_s=\{2\}$ であるから $r\in\Gamma_s$ である。よって、命題4.3.3より $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。
(IV) $s_1=s_2=3,\ s_3=4$ のとき
このとき、$r=1,\ \Gamma_s=\{1,2\}$ であるから $r\in\Gamma_s$ である。よって、命題4.3.3より $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。

いずれの場合にも、$k=3$ のとき、次数11以下の2変数複素斉次多項式の福井不変量は安定的区間状である。

□

命題 4.3.10 命題4.3.3の形で与えられる次数11以下の2変数複素斉次多項式において、$k=4$ のとき、福井不変量は安定的区間状である。

証明　$k=4$ のとき、補題4.3.7と補題4.3.8より、$f_{\mathbb{K}}(f)$ が安定的区間状でないものを $s\le 11$ で探すには $8\le s\le 10$ を調べればよい。
(1) $s=8$ のとき
$s_1=s_2=s_3=s_4=2$ より、$r=2,\ \Gamma_s=\{2\}$ であるから $r\in\Gamma_s$ である。よって、命題4.3.3より $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。
(2) $s=9$ のとき
$s_1=s_2=s_3=2,\ s_4=3$ より、$r=1,\ \Gamma_s=\{1,3\}$ であるから $r\in\Gamma_s$ である。よって、命題4.3.3より $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。
(3) $s=10$ のとき
このときは次の2通りが考えられる。
(I) $s_1=s_2=2,\ s_3=s_4=3$ のとき
このとき、$r=1,\ \Gamma_s=\{1,2\}$ であるから $r\in\Gamma_s$ である。よって、命題4.3.3より $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。
(II) $s_1=s_2=s_3=2,\ s_4=4$ のとき
このとき、$r=2,\ \Gamma_s=\{2\}$ であるから $r\in\Gamma_s$ である。よって、命題4.3.3より $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。

いずれの場合にも、$k=4$ のとき、次数11以下の2変数複素斉次多項式の福井不変量は安定的区間状である。

□

命題 4.3.11 命題4.3.3の形で与えられる次数11以下の2変数複素斉次多項式において、$k=5$ のとき、福井不変量は安定的区間状である。

証明　$k=5$ のとき、補題4.3.7と補題4.3.8より、$f_{\mathbb{K}}(f)$ が安定的区間状でないものを $s\le 11$ で探すには $s=10$ の場合を調べればよい。$s=10$

のとき、$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = 2$ である。このとき、$r = 2,\ \Gamma_s = \{2\}$ であるから $r \in \Gamma_s$ である。よって、命題 4.3.3 より $A_{\mathbb{K}}(f)$ は安定的区間状である。

$\square$

以上より系 4.3.2 が示され、定理 4.3.1 が証明された。

第5章　福井不変量とそれを含む最小の半群

福井不変量を含む最小の半群を考える。もし、福井不変量が解析関数芽に対する何らかの同値関係に対する不変量なら、その半群も不変量になる。本章では、それらの不変量に対する関係について議論する。

5.1　群、半群

まず、群の定義を述べる際に必要となる二項演算の定義を述べる。

定義 5.1.1 集合 G の元を二つ入れたら G の元が一つ返ってくるような関数を G 上の**二項演算**という。

二項演算は足し算、引き算、掛け算、割り算など、二つの数から一つの数を決める演算を一般化した概念である。

注意 5.1.2 二項演算は必ずしも可換とは限らない。例えば、2 次の正方行列からなる集合 G の元に対する積は可換ではない。

次に、群の定義を述べる。

定義 5.1.3 集合 G とその集合上の二項演算 $\circ$ の組が以下の三つの条件を満たすときに、その対 $(G, \circ)$ を群と定義する。
(1) 任意の $a, b, c \in G$ に対して $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ を満たす。
(2) ある $e \in G$ が存在して、任意の $a \in G$ に対して、$a \circ e = e \circ a = a$ を満たす。
(3) 任意の $a \in G$ に対して、$a \circ b = b \circ a = e$ を満たす $b \in G$ が存在する。

群における条件 (1) は、演算が結合法則を満たしていることを意味している。(2) の e を単位元という。また、(3) の b を a の逆元と言い、a^{-1} と書く。

更に、半群の定義を述べる。

定義 5.1.4 集合とその集合上の二項演算の対で定義5.1.3の(1)のみを満たすものを半群という。

最後に、自然数、整数、複素数、実数全体の集合などに対し、二項演算として足し算と掛け算を取り挙げて、群と半群を具体的に説明する。

例 5.1.5 まずは演算が和$+$の場合の例を紹介する。$(\mathbb{N},+)$ は半群である。$(\mathbb{Z},+)$、$(\mathbb{Q},+)$、$(\mathbb{R},+)$ は群である。$M(n,p:\mathbb{R})$ を n 行 p 列の実行列全体の集合とすると、$(M(n,p:\mathbb{R}),+)$ は群である。

例 5.1.6 演算が掛け算 $\times$ の場合の例を紹介する。$(\mathbb{N},\times)$、$(\mathbb{Z},\times)$、$(\mathbb{Q},\times)$ は半群である。$\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ とすると、$(\mathbb{Q}^*,\times)$、$(\mathbb{R}^*,\times)$ は群である。

福井不変量 $A_{\mathbb{K}}(f)$(厳密には $A_{\mathbb{K}}(f)\setminus\{0\}$) は一般に足し算に関して半群でない。以下に $A_{\mathbb{K}}(f)$ が半群とならない例を紹介する。

例 5.1.7 $f:(\mathbb{K}^2,O)\to(\mathbb{K},0)$、ただし、$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を

$$f(x,y)=x^2-y^3$$

とする。このとき、$i\in\mathbb{N}$ とすると、

$$f(t^3+t^{3+i},t^2)=(t^3+t^{3+i})^2-(t^2)^3=2t^{6+i}+t^{6+2i}$$

である。$\lambda(t)=(t^3+t^{3+i},t^2)$ とすると、$O(f\circ\lambda(t))=6+i\ (i\in\mathbb{N})$ であるから、$f(x,y)$ の福井不変量 $A_{\mathbb{K}}(f)$ は

$$\begin{aligned}A_{\mathbb{K}}(f)&=\{2,3,4,6,7,8,\ldots\}\cup\{\infty\}\\&=2\mathbb{N}\cup3\mathbb{N}\cup\mathbb{N}_{\geq6}\cup\{\infty\}\end{aligned}$$

である。よって、$5=2+3\notin A_{\mathbb{K}}(f)$ となるから $A_{\mathbb{K}}(f)$ は半群ではない。

5.2　福井不変量を含む最小の半群

本題に入る前にまず記号を定める。

記号 5.2.1 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$、$f : (\mathbb{K}^n, 0) \to (\mathbb{K}, 0)$ を C^ω 級関数芽とする。このとき、f の福井不変量 $A_\mathbb{K}(f)$ に対し、$\hat{A}_\mathbb{K}(f)$ を和+に関して $A_\mathbb{K}(f) \setminus \{0\}$ を含む最小の半群 (または、福井不変量で生成される半群) と定める。$\hat{A}_\mathbb{K}(f)$ を**福井不変量** $A_\mathbb{K}(f)$ **を含む最小の半群**という。

上の定義より、福井不変量とそれを含む最小の半群の間に次の性質が成り立つことが容易にわかる。

命題 5.2.2 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ で

$$f, g : (\mathbb{K}^n, 0) \to (\mathbb{K}, 0)$$

はともに C^ω 級関数芽とする。このとき、次が成り立つ。
(1) $A_\mathbb{K}(f) \subset A_\mathbb{K}(g)$ ならば、$\hat{A}_\mathbb{K}(f) \subset \hat{A}_\mathbb{K}(g)$ である。
(2) $A_\mathbb{K}(f) = A_\mathbb{K}(g)$ ならば、$\hat{A}_\mathbb{K}(f) = \hat{A}_\mathbb{K}(g)$ である。

実解析関数芽 $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ に対し、定理 3.1.10 で示したように、福井不変量 $A_\mathbb{R}(f)$ はブロー解析不変量であった。また、注意 3.1.11(2) で指摘したように、2変数複素解析関数芽 $f : (\mathbb{C}^2, O) \to (\mathbb{C}, 0)$ に対し、福井不変量 $A_\mathbb{C}(f)$ は位相解析不変量であった。

一方、命題 5.2.2(2) から、福井不変量 $A_\mathbb{K}(f)$ を含む最小の半群 $\hat{A}_\mathbb{K}(f)$ も上記の不変量になる。従って、$f, g : (\mathbb{K}^n, 0) \to (\mathbb{K}, 0)$ を解析関数芽とするとき、$\hat{A}_\mathbb{K}(f) \neq \hat{A}_\mathbb{K}(g)$ なら $A_\mathbb{K}(f) \neq A_\mathbb{K}(g)$ であるので $A_\mathbb{K}(f)$ が $\hat{A}_\mathbb{K}(f)$ と同等の不変量であるか、より多くの関数を区別する秀れた不変量であるかどうかが自然に問題になる。

主問題　$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ で、

$$f, g : (\mathbb{K}^n, 0) \to (\mathbb{K}, 0)$$

は C^ω 級関数芽とする。このとき、$\hat{A}_\mathbb{K}(f) = \hat{A}_\mathbb{K}(g)$ ならば $A_\mathbb{K}(f) = A_\mathbb{K}(g)$ であるか。

もし、問題が肯定的に示されれば、$\hat{A}_\mathbb{K}(f)$ は代数的構造を持つ分、福井不変量 $A_\mathbb{K}(f)$ より秀れた不変量ということになる。

一方、否定的な例が存在する場合には、上で触れたように、福井不変量の方が秀れているということになる。この問題を本論文の主問題として提出する。

5.3　3変数以上の実·複素関数の場合における主問題に対する否定的な命題

この章では前節で提出した主問題に対して、3変数以上の実·複素解析関数の場合に、いくつかの否定的な例を通して、ひとつの命題を定式化していく。

最初に3変数の場合を確かめる。

$$f, g : (\mathbb{K}^3, 0) \to (\mathbb{K}, 0)$$

f, g を C^ω 級関数芽とする場合に $A_{\mathbb{K}}(f) \neq A_{\mathbb{K}}(g)$ であるが $\hat{A}_{\mathbb{K}}(f) = \hat{A}_{\mathbb{K}}(g)$ となる最も簡単な例を紹介する。

例 5.3.1 (S. Koike) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ で、多項式関数

$$f, g : (\mathbb{K}^3, 0) \to (\mathbb{K}, 0)$$

を

$$f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^5,\ g(x, y, z) = x^2 + y^3$$

とする。このとき、f, g の福井不変量は

$$A_{\mathbb{K}}(f) = \{2, 3, 4, 5, 7, 6, 8, 9 \ldots\} \cup \{\infty\}$$

$$A_{\mathbb{K}}(g) = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, \ldots\} \cup \{\infty\}$$

である。よって、$A_{\mathbb{K}}(f) \neq A_{\mathbb{K}}(g)$ である。

次に、それぞれの福井不変量を含む最小の半群について考えると、

$$\hat{A}_{\mathbb{K}}(f) = \hat{A}_{\mathbb{K}}(g) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$$

となり、一致する。以上より、$A_{\mathbb{K}}(f) \neq A_{\mathbb{K}}(g)$ であるが $\hat{A}_{\mathbb{K}}(f) = \hat{A}_{\mathbb{K}}(g)$ であるので、主問題に対する否定的な例である。

一般的 (ジェネリック) な解析関数芽は孤立特異点を持つことが知られている。上の例において、$O \in \mathbb{K}^3$ で f は孤立特異点を持つが、g は非孤立特異点を持つ。従って、安定性を考慮すると、どちらも孤立特異点を持つ場合にそのような否定的な例が存在するかが自然に問題になる。次にそのような例を挙げる。

例 5.3.2 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし、多項式関数

$$f,g:(\mathbb{K}^3,0)\to(\mathbb{K},0)$$

を

$$f(x,y,z)=x^4+y^5+z^9,\ g(x,y,z)=x^4+y^5+z^{22}$$

と定義すると、f も g も $O\in\mathbb{K}^3$ で孤立特異点を持つ。このとき、f,g の福井不変量は

$$A_{\mathbb{K}}(f)=\{4,5,8,9,10,12,15,16,18,20,21,\ldots\}\cup\{\infty\}$$

$$A_{\mathbb{K}}(g)=\{4,5,8,10,12,15,16,20,21,\ldots\}\cup\{\infty\}$$

である。また、それぞれの福井不変量を含む最小の半群は、

$$\hat{A}_{\mathbb{K}}(f)=\{4,5,8,9,10,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,\ldots\}$$

$$\hat{A}_{\mathbb{K}}(g)=\{4,5,8,9,10,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,\ldots\}$$

である。以上より、$A_{\mathbb{K}}(f)\neq A_{\mathbb{K}}(g)$ であるが $\hat{A}_{\mathbb{K}}(f)=\hat{A}_{\mathbb{K}}(g)$ である。

以上の例より、3変数の場合の主問題に対する否定的な例を一般化するヒントを得て、それを証明することが出来たので以下に述べる。その定式化のために3章で導入した記号を用いるのでもう一度思い出しておこう。

(記号)
自然数 $p,q\in\mathbb{N}$ に対し、それらの最大公約数 (p,q) を d で表すことにする。このとき、$p=p_1d,\ q=q_1d$ とおくと、p,q の最小公倍数 $[p,q]=p_1q_1d=p_1q=pq_1$ である。

定理 5.3.3 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし、$f,g:(\mathbb{K}^3,0)\to(\mathbb{K},0)$ を

$$f(x,y,z)=x^p+y^q+z^{p+q},\ g(x,y,z)=x^p+y^q+z^r$$

で定義される多項式関数とする。ただし、$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ の場合は p,q のどちらか一方は奇数とする。このとき、$q_1>p_1\geq 2,\ r\geq p_1q_1d$ ならば、$A_{\mathbb{K}}(f)\neq A_{\mathbb{K}}(g)$ だが、$\hat{A}_{\mathbb{K}}(f)=\hat{A}_{\mathbb{K}}(g)$ である。

証明　(1) $A_{\mathbb{K}}(f) \neq A_{\mathbb{K}}(g)$ を示す。
まず、$p+q \in A_{\mathbb{K}}(f)$ であることがわかる。

$$\begin{aligned} p_1q_1d - (p+q) + d &= p_1q_1d - (p_1+q_1)d + d \\ &= (p_1-1)(q_1-1)d \geq 2d \end{aligned}$$

であるから、$p_1q_1d \geq (p+q)+d$ である。従って、

$$r \geq p_1q_1d > p+q \tag{5.1}$$

となる。
　一方、定理 3.2.3、定理 3.2.4(1) より、

$$A_{\mathbb{K}}(x^p+y^q) \cap \mathbb{N}_{\leq p_1q_1d} = (p\mathbb{N} \cup q\mathbb{N}) \cap \mathbb{N}_{\leq p_1q_1d} \tag{5.2}$$

である。また、$p+q = p_1d + q_1d = (p_1+q_1)d$ であり、$(p_1, q_1) = 1$ より、$p_1 \nmid p_1+q_1$ かつ $q_1 \nmid p_1+q_1$ である。従って、

$$p = p_1d \nmid (p_1+q_1)d = p+q,\ q = q_1d \nmid (p_1+q_1)d = p+q \tag{5.3}$$

となる。(5.1), (5.2), (5.3) より、$p+q \notin A_{\mathbb{K}}(g)$ となる。よって、$A_{\mathbb{K}}(f) \neq A_{\mathbb{K}}(g)$ である。
(2) $\hat{A}_{\mathbb{K}}(f) = \hat{A}_{\mathbb{K}}(g)$ を示す。$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のときは、p または q のどちらか一方が奇数であることから、定理 3.2.3、定理 3.2.4(1) より、

$$\begin{aligned} &A_{\mathbb{K}}(x^p+y^q) = p\mathbb{N} \cup q\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_{>p_1q_1d} \cup \{\infty\} \\ &\hat{A}_{\mathbb{K}}(x^p+y^q) = \{ps+qt \mid (s,t) \in \mathbb{N}_{\geq 0} \times \mathbb{N}_{\geq 0} \setminus \{0,0\}\} \cup \mathbb{N}_{>p_1q_1d} \end{aligned}$$

である。ここで、

$$p+q \in p\mathbb{N} + q\mathbb{N},\ p+q < p_1q_1d$$

より、

$$\hat{A}_{\mathbb{K}}(f) = \hat{A}_{\mathbb{K}}(x^p+y^q) = \{ps+qt \mid (s,t) \in \mathbb{N}_{\geq 0} \times \mathbb{N}_{\geq 0} \setminus \{0,0\}\} \cup \mathbb{N}_{>p_1q_1d}$$

である。また、$r \geq p_1q_1d$ より、

$$\hat{A}_{\mathbb{K}}(g) = \hat{A}_{\mathbb{K}}(x^p+y^q) = \{ps+qt \mid (s,t) \in \mathbb{N}_{\geq 0} \times \mathbb{N}_{\geq 0} \setminus \{0,0\}\} \cup \mathbb{N}_{>p_1q_1d}$$

である。従って、$\hat{A}_{\mathbb{K}}(f) = \hat{A}_{\mathbb{K}}(g)$ である。

□

注意 5.3.4 定理5.3.3において、$p_1=1$ならば、$p_1 \mid p_1+q_1$より、$A_{\mathbb{K}}(f)=A_{\mathbb{K}}(g)$となるから$p_1 \geq 2$で考える必要がある。

注意 5.3.5 $p=1$のとき、

$$A_{\mathbb{K}}(f)=A_{\mathbb{K}}(g)=\mathbb{N}\cup\{\infty\}$$

となるから、$p \geq 2$の場合を考えている。

注意 5.3.6 $p_1=q_1$のとき、$(p_1,q_1)\neq 1$となってしまうため$p_1\neq q_1$、即ち$q_1>p_1$の仮定は自然である。

注意 5.3.7 定理5.3.3において、$\mathbb{K}=\mathbb{R}$でp,qともに偶数の場合にも同様のことが考えられるが、p,q,rの場合分けが繁雑になるのでここでは省略する。

定理5.3.3の証明と同様に以下の定理を示すことができる。

定理 5.3.8 $f,g:(\mathbb{R}^3,0)\to(\mathbb{R},0)$を

$$f(x,y,z)=x^p-y^q+z^{p+q},\ g(x,y,z)=x^p-y^q+z^{p_1q_1d}$$

で定義される多項式関数とする。このとき、$q_1>p_1\geq 2,\ r\geq p_1q_1d$ならば、$A_{\mathbb{K}}(f)\neq A_{\mathbb{K}}(g)$だが$\hat{A}_{\mathbb{K}}(f)=\hat{A}_{\mathbb{K}}(g)$である。

次に、$n\geq 4$の場合を考える。

定理 5.3.9 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$または$\mathbb{C}$とし、3変数多項式関数$f_1,g_1:(\mathbb{K}^3,0)\to(\mathbb{K},0)$を定理5.3.3または定理5.3.8の仮定を満たすものとする。

次に、$f,g:(\mathbb{K}^n,0)\to(\mathbb{K},0),\ n\geq 4$を

$$f(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)=f_1(x_1,x_2,x_3)$$

$$g(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)=g_1(x_1,x_2,x_3)$$

と定義すると、$A_{\mathbb{K}}(f)\neq A_{\mathbb{K}}(g)$だが、$\hat{A}_{\mathbb{K}}(f)=\hat{A}_{\mathbb{K}}(g)$である。

証明

$$A_{\mathbb{K}}(f)=A_{\mathbb{K}}(f_1)\neq A_{\mathbb{K}}(g_1)=A_{\mathbb{K}}(g)$$
$$\hat{A}_{\mathbb{K}}(f)=\hat{A}_{\mathbb{K}}(f_1)=\hat{A}_{\mathbb{K}}(g_1)=\hat{A}_{\mathbb{K}}(g)$$

より明らかである。

□

注意 5.3.10 定理 5.3.9 の f,g は $0\in\mathbb{K}^n$ で孤立特異点を持たない。孤立特異点を持つようにするためには、定理 5.3.3、定理 5.3.8 の証明からわかるように

$$f(x_1,x_2,x_3,\cdots,x^n)=f_1(x_1,x_2,x_3)+x_4^{s_4}+\cdots+x_n^{s_n}$$

$$g(x_1,x_2,x_3,\cdots,x^n)=g_1(x_1,x_2,x_3)+x_4^{r_4}+\cdots+x_n^{r_n}$$

とし、$s_4,\cdots,s_n$, $r_4,\cdots,r_n$ を p,q に対して十分大きなものを取ればよいことがわかる。

$n\geq 3$ の場合には福井不変量のほうがそれで生成される半群より多くの解析関数または解析的特異点を区別できるので、より秀れていることがわかった。したがって、2変数の場合が問題になる。次節ではその問題を扱う。

5.4　2変数の実関数の場合における主問題に対する否定的命題

2015年12月にシドニー大学の L. Paunescu 氏が兵庫教育大学に滞在しているとき、次に紹介する例が主問題に対する反例になっているのではないかというアドバイスを頂いた。

例 5.4.1 (L. Paunescu) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ で、多項式関数

$$f,g:(\mathbb{K}^2,O)\to(\mathbb{K},0)$$

を

$$f(x,y)=x^3+y^4,\ g(x,y)=x^3+x^2y+y^4$$

とする。このとき、f,g の福井不変量は次のように計算される。

$$A_{\mathbb{K}}(f)=\{3,4,6,8,9,12,13,\cdots\}\cup\{\infty\}$$

$$A_{\mathbb{K}}(g)=\{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,\cdots\}\cup\{\infty\}$$

$A_{\mathbb{K}}(f)$ は定義より、または定理 3.2.3、定理 3.2.4(1) を用いることにより求まる。また、$A_{\mathbb{K}}(f)\subset A_{\mathbb{K}}(g)$ となることも容易にわかる。$A_{\mathbb{K}}(f)\ni 7$ は解析弧 $x(t)=-t^2+t^3$, $y(t)=-t^2$ で与えられる。$A_{\mathbb{K}}(f)\ni 10$ は、解析

弧 $x(t)=-t^2,\ y(t)=-t^3+t^4$ で与えられ、また、$A_{\mathbb{K}}(f)\ni 11$ は、解析弧 $x(t)=-t^4,\ y(t)=t^3$ で与えられる。

しかし、$A_{\mathbb{K}}(f)\ni 5$ を与える解析弧を見つけるのは、それほど容易でない。実際、5 は解析弧

$$x(t)=-t-t^2+t^3,\ y(t)=t$$

で与えられる。以上より、f,g の福井不変量が求まり、$A_{\mathbb{K}}(f)\neq A_{\mathbb{K}}(g)$ であることが従う。

次に、それぞれの福井不変量を含む最小の半群について考える。

$$\hat{A}_{\mathbb{K}}(f)=\{3,4,6,7,8,9,10,\cdots\}$$

$$\hat{A}_{\mathbb{K}}(g)=\{3,4,5,6,7,8,9,10,\cdots\}$$

である。したがって、$5\notin A_{\mathbb{K}}(f)$ で $5\in A_{\mathbb{K}}(g)$ より、$\hat{A}_{\mathbb{K}}(f)\neq\hat{A}_{\mathbb{K}}(g)$ である。以上より、$A_{\mathbb{K}}(f)\neq A_{\mathbb{K}}(g)$ かつ $\hat{A}_{\mathbb{K}}(f)\neq\hat{A}_{\mathbb{K}}(g)$ となり、主問題の反例でないことがわかる。

L. Paunescu 氏の考えた例は上でみたように主問題の反例とはなっていなかった。これは $5\in A_{\mathbb{K}}(g)$ を見るのが容易でなかったことによる。実際、$5\notin A_{\mathbb{K}}(g)$ ならば、$\hat{A}_{\mathbb{K}}(f)=\hat{A}_{\mathbb{K}}(g)$ となり、主問題の反例になっている。

一方、多くの2変数関数の福井不変量の計算より、複素の場合より実の場合に主問題の反例を構成するのが容易ではないかという印象を持つようになり、次の例を考えてみた。

例 5.4.2 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ で、多項式関数

$$f,g:(\mathbb{K}^2,O)\to(\mathbb{K},0)$$

を、

$$f(x,y)=x^6+y^8,\ g(x,y)=x^6+x^4y^2+y^8$$

と定義する。

(1) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ の場合:

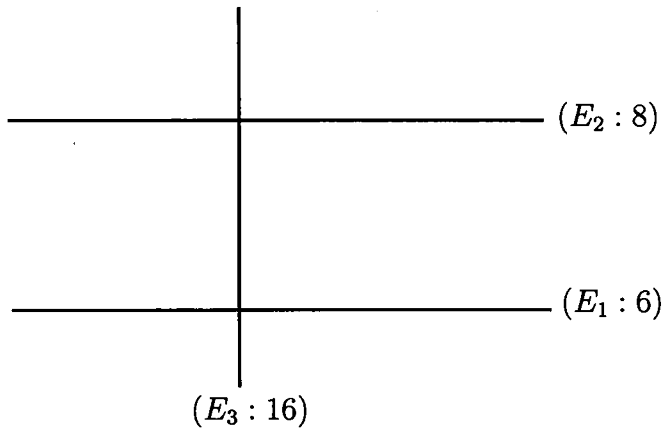
f の福井不変量は定理 3.2.4(2) より、

$$A_{\mathbb{R}}(f)=6\mathbb{N}\cup 8\mathbb{N}\cup\{\infty\}$$

と求まる。一方、g の福井不変量を特異点解消ツリーを用いて求めるために、特異点解消プロセスを書くと、

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= x^6 + x^4y^2 + y^8 \\
G_1(X,Y) &= g(XY,Y) = Y^6(X^6 + X^4 + Y^2) \\
G_2(X,Y) &= G_1(X,XY) = X^8Y^6(X^4 + X^2 + Y^2) \\
G_3(X,Y) &= G_2(X,XY) = X^{16}Y^6(X^2 + 1 + Y^2)
\end{aligned}$$

となる。したがって、g の福井不変量の特異点解消ツリーは、以下のようになる。



(図　5.1)

これより、

$$\begin{aligned}
A_{\mathbb{R}}(g) &= 6\mathbb{N} \cup 8\mathbb{N} \cup 16\mathbb{N} \cup (6\mathbb{N} + 16\mathbb{N}) \cup (8\mathbb{N} + 16\mathbb{N}) \cup \{\infty\} \\
&= 6\mathbb{N} \cup 8\mathbb{N} \cup (6\mathbb{N} + 16\mathbb{N}) \cup \{\infty\}
\end{aligned}$$

となる。従って、$22 \in A_{\mathbb{R}}(g)$ だが $22 \notin A_{\mathbb{R}}(f)$ であることより、$A_{\mathbb{K}}(f) \neq A_{\mathbb{K}}(g)$ が言える。

ここで $22 \in A_{\mathbb{R}}(g)$ は、解析弧 $\lambda(t) = (t^4, t^3)$ で与えられる。

また、$\hat{A}_{\mathbb{R}}(f)$, $\hat{A}_{\mathbb{R}}(g)$ は、

$$\hat{A}_{\mathbb{R}}(f) = \hat{A}_{\mathbb{R}}(g) = 6\mathbb{N} \cup 8\mathbb{N} \cup (6\mathbb{N} + 8\mathbb{N})$$

となる。

以上より、この例は実関数の場合の主問題に対する反例になっている。
(2) $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ の場合:

f の福井不変量は定理3.2.3より、g の福井不変量については、$g(x,y)=x^4(x^2+y^2)+y^8$ より、計算テクニック(または特異点解消ツリー)を用いて、次のように求まる。

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{C}}(f) &= 6\mathbb{N}\cup 8\mathbb{N}\cup \mathbb{N}_{\geq 24}\cup\{\infty\} \\ A_{\mathbb{C}}(g) &= 6\mathbb{N}\cup 8\mathbb{N}\cup (6\mathbb{N}+16\mathbb{N})\cup(8\mathbb{N}+16\mathbb{N})\cup(6\mathbb{N}+\mathbb{N})\cup\{\infty\} \\ &= \mathbb{N}_{\geq 6}\cup\{\infty\} \end{aligned}$$

である。従って、$7\in A_{\mathbb{C}}(g)$ だが $7\notin A_{\mathbb{C}}(f)$ であることより、$A_{\mathbb{C}}(f)\neq A_{\mathbb{C}}(g)$ が言える。

また $\hat{A}_{\mathbb{C}}(f)$, $\hat{A}_{\mathbb{C}}(g)$ は、

$$\begin{aligned} \hat{A}_{\mathbb{C}}(f) &= 6\mathbb{N}\cup 8\mathbb{N}\cup(6\mathbb{N}+8\mathbb{N})\cup(24\mathbb{N}+\mathbb{N}) \\ &= 6\mathbb{N}\cup 8\mathbb{N}\cup(6\mathbb{N}+8\mathbb{N})\cup\mathbb{N}_{\geq 24} \\ \hat{A}_{\mathbb{C}}(g) &= \mathbb{N}_{\geq 6} \end{aligned}$$

となり、$7\in\hat{A}_{\mathbb{C}}(g)$ だが $7\notin\hat{A}_{\mathbb{C}}(f)$ であることより、$\hat{A}_{\mathbb{C}}(f)\neq\hat{A}_{\mathbb{C}}(g)$ である。

従って、複素関数の場合は、主問題に対する反例になっていない。

例5.4.2(1)を一般化して、2変数実関数の場合における主問題に対する否定的命題を次のように定式化した。

定理 5.4.3 $f,g:(\mathbb{R}^2,O)\to(\mathbb{R},0)$ を

$$f(x,y)=x^{2p}+y^{2(p+1)},\ g(x,y)=x^{2p}+x^{2(p-1)}y^2+y^{2(p+1)}\quad(p\in\mathbb{N}_{\geq 2})$$

で定義された多項式関数とする。このとき、$A_{\mathbb{R}}(f)\neq A_{\mathbb{R}}(g)$ であるが $\hat{A}_{\mathbb{R}}(f)=\hat{A}_{\mathbb{R}}(g)$ である。

定理5.4.3を証明するために次の補題を用意する。

補題 5.4.4 $f,g:(\mathbb{R}^2,O)\to(\mathbb{R},0)$ を

$$f(x,y)=x^{2p}+y^{2(p+1)},\ g(x,y)=x^{2p}+x^{2(p-1)}y^2+y^{2(p+1)}\quad(p\in\mathbb{N}_{\geq 2})$$

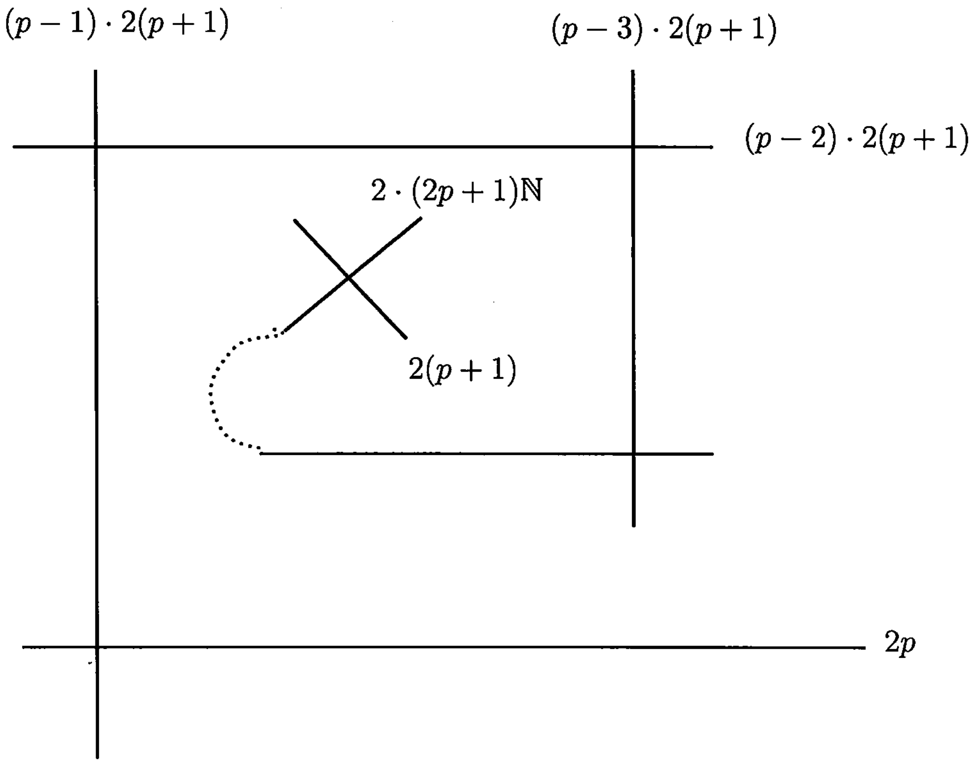
で定義された多項式関数とする。このとき、f,g の福井不変量は次の通りである。

(1) $A_{\mathbb{R}}(f)=2p\mathbb{N}\cup 2(p+1)\mathbb{N}\cup\{\infty\}$
(2) $A_{\mathbb{R}}(g)=2p\mathbb{N}\cup 2(p+1)\mathbb{N}\cup(2p\mathbb{N}+(p-1)2(p+1)\mathbb{N})\cup\{\infty\}$

証明　(1) は定理 3.2.4(2) より従う。
　次に、(2) を示すために g の特異点解消ツリーを考える。

$$
\begin{aligned}
G_1(X,Y) &= g(XY,Y) = Y^{2p}(X^{2p} + X^{2(p-1)} + Y^2)\\
G_2(X,Y) &= G_1(X,XY) = X^{2(p+1)}Y^{2p}(X^{2(p-1)} + X^{2(p-2)} + Y^2)\\
&\vdots\\
G_i(X,Y) &= G_{i-1}(X,XY) = X^{(i-1)2(p+1)}Y^{2p}(X^{2(p-(i-1))} + Y^{2(p-i)} + Y^2)\ (2 \leq i \leq p)\\
&\vdots\\
G_p(X,Y) &= G_{p-1}(X,XY) = X^{(p-1)2(p+1)}Y^{2p}(X^2 + 1 + Y^2)
\end{aligned}
$$

となり、特異点解消ツリーは以下のようになる。ここでは、例外因子の重複度のみを記している。



(図　5.2)

特異点解消ツリーより、

$$\begin{aligned}A_{\mathbb{R}}(g) = &2p\mathbb{N} \cup 2(p+1)\mathbb{N} \cup 2\cdot 2(p+1)\mathbb{N} \cup \cdots \cup (p-1)2(p+1)\mathbb{N}\cup \\ &(2p\mathbb{N} + (p-1)2(p+1)\mathbb{N}) \cup (2(p+1)\mathbb{N} + 2\cdot 2(p+1)\mathbb{N})\cup \\ &\cdots \cup ((p-2)2(p+1)\mathbb{N} + (p-1)2(p+1)\mathbb{N}) \cup \{\infty\}\end{aligned}$$

である。ここで、

$$2(p+1)\mathbb{N} \cup 2\cdot 2(p+1)\mathbb{N} \cup \cdots \cup (p-1)2(p+1)\mathbb{N} = 2(p+1)\mathbb{N}$$

$(2(p+1)\mathbb{N}+2\cdot 2(p+1)\mathbb{N})\cup\cdots\cup((p-2)2(p+1)\mathbb{N}+(p-1)2(p+1)\mathbb{N}) \subset 2(p+1)\mathbb{N}$

であるから、

$$A_{\mathbb{R}}(g) = 2p\mathbb{N} \cup 2(p+1)\mathbb{N} \cup (2p\mathbb{N} + (p-1)2(p+1)\mathbb{N}) \cup \{\infty\}$$

である。

□

補題 5.4.5 $f, g : (\mathbb{R}^2, O) \to (\mathbb{R}, 0)$ を

$$f(x,y) = x^{2p} + y^{2(p+1)},\ g(x,y) = x^{2p} + x^{2(p-1)}y^2 + y^{2(p+1)}\quad (p \in \mathbb{N}_{\geq 2})$$

で定義された多項式関数とする。このとき、福井不変量を含む最小の半群は

$$\hat{A}_{\mathbb{R}}(f) = \hat{A}_{\mathbb{R}}(g) = 2p\mathbb{N} \cup 2(p+1)\mathbb{N} \cup (2p\mathbb{N} + 2(p+1)\mathbb{N})$$

である。

証明　補題5.4.4の(1)より、$A_{\mathbb{R}}(f)$ の半群 $\hat{A}_{\mathbb{R}}(f)$ について和に関して閉じているので

$$\hat{A}_{\mathbb{R}}(f) = 2p\mathbb{N} \cup 2(p+1)\mathbb{N} \cup (2p\mathbb{N} + 2(p+1)\mathbb{N})$$

である。次に、$\hat{A}_{\mathbb{R}}(g)$ を求める。補題5.4.4の(2)より、

$$\begin{aligned}\hat{A}_{\mathbb{R}}(g) = &2p\mathbb{N} \cup 2(p+1)\mathbb{N} \cup (2p\mathbb{N} + (p-1)2(p+1)\mathbb{N})\cup \\ &(2p\mathbb{N} + 2(p+1)\mathbb{N}) \cup (2p\mathbb{N} + (2p\mathbb{N} + (p-1)2(p+1)\mathbb{N}))\cup \\ &(2(p+1)\mathbb{N} + (2p\mathbb{N} + (p-1)2(p+1)\mathbb{N}))\cup \\ &(2p\mathbb{N} + 2(p+1)\mathbb{N} + (2p\mathbb{N} + (p-1)2(p+1)\mathbb{N}))\end{aligned}$$

である。このとき、

$$
\begin{aligned}
&(2p\mathbb{N} + (p-1)2(p+1)\mathbb{N}) \cup (2p\mathbb{N} + 2(p+1)\mathbb{N}) \cup \\
&(2p\mathbb{N} + (2p\mathbb{N} + (p-1)2(p+1)\mathbb{N})) \cup \\
&(2(p+1)\mathbb{N} + (2p\mathbb{N} + (p-1)2(p+1)\mathbb{N})) \cup \\
&(2p\mathbb{N} + 2(p+1)\mathbb{N} + (2p\mathbb{N} + (p-1)2(p+1)\mathbb{N}) = 2p\mathbb{N} + 2(p+1)\mathbb{N}
\end{aligned}
$$

より、

$$\hat{A}_{\mathbb{R}}(g) = 2p\mathbb{N} \cup 2(p+1)\mathbb{N} \cup (2p\mathbb{N} + 2(p+1)\mathbb{N})$$

である。したがって、

$$\hat{A}_{\mathbb{R}}(f) = \hat{A}_{\mathbb{R}}(g) = 2p\mathbb{N} \cup 2(p+1)\mathbb{N} \cup (2p\mathbb{N} + 2(p+1)\mathbb{N})$$

である。

□

(定理 **5.4.3** の証明)
補題 5.4.4(2) より、

$$2p + (p-1)2(p+1) \in A_{\mathbb{R}}(g)$$

である。また、$2p + (p-1)2(p+1)$ を $2(p+1)$ で割ったときの余りを考えると $2p$ となるので、$2(p+1)$ で割り切れない。次に、$2p$ で割ったときの余りを考えると

$$2p + (p-1)2(p+1) = 2p(1 + (p+1)) + 2(p-1)$$

より余りは $2(p-1)$ となるので、$p \geq 2$ から $2p$ で割り切れない。よって、補題 5.4.4(1) より、

$$2p + (p-1)2(p+1) \notin A_{\mathbb{R}}(f)$$

であるから、$A_{\mathbb{R}}(f) \neq A_{\mathbb{R}}(g)$ である。更に補題 5.4.5 より、$\hat{A}_{\mathbb{R}}(f) = \hat{A}_{\mathbb{R}}(g)$ であるから定理 5.4.3 は示された。

□

以上より、３変数以上の実・複素関数、２変数実関数の場合には、主問題に対する否定的な例が存在することがわかった。このことから福井不

変量は、福井不変量を含む最小の半群よりも秀れた不変量であることがわかる。

残念ながら、2変数複素関数で主問題に対する否定的な例を見つけることができなかった。

最後に、次の問題を提起して私の修士論文を終える。

問題 5.4.6 $f : (\mathbb{C}^2, O) \to (\mathbb{C}, 0)$ を $f(0) = 0$ となる2変数正則関数とする。このとき、$\hat{A}_{\mathbb{C}}(f) = \hat{A}_{\mathbb{C}}(g)$ ならば $A_{\mathbb{C}}(f) = A_{\mathbb{C}}(g)$ であるか。

参考文献

[1] T. Fukui: *Seeking invariants for blow-analytic equivalence,* Compositio Math., **105** (1997), 95-108.

[2] T. Fukui, L. Paunescu: *The modified analytic trivialization for weighed homogeneous functions,* J. Math. Soc. Japan, **52** (2000), 433-446.

[3] T. Fukui, L. Paunescu: *On blow-analytic equivalence.* (English, French summary) Arc spaces and additive invariants in real algebraic and analytic geometry, Panor. Syntheses, **24**, Soc. Math, France, Paris (2007) pp. 87-125.

[4] T. Fukui, E. Yoshinaga: *The modified analytic trivialization of family of real analytic functions,* Invent. math., **82** (1985), 467-477.

[5] H. Hironaka: *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characterisitic zero,* I, II, Annals of Math., **79** (1964), 109-302.

[6] S. Izumi, S. Koike, T.-C. Kuo: *Computations and stability of the Fukui invariant,* Compositio Mathematica **130** (2002), 49-73.

[7] S. Koike, A. Parusiński: *Blow-analytic equivalence of two variable real analytic function germs,* J. Algebraic Geometry, **19** (2010), 439-472.

[8] S. Koike, A. Parusiński: *Some questions on the Fukui numerical set,* Demonstratio Mathematica, Vol. XLIII, **No2**. (2010), 285-302.

[9] T.-C. Kuo: *The modified analytic trivialization of singularities,* J. Math. Soc. Japan, **32** (1980), 605-614.

[10] T.-C. Kuo: *On classification of real singularities,* Invent. math., **82** (1985), 257-262.

[11] 安納秀佳 : 与えられた単位分数の和で表せる数について, 兵庫教育大学修士論文 (2014).

[12] 一松信 : 多変数解析関数論, 培風館 (1960).

[13] 内田伏一 : 数学シリーズ　集合と位相, 裳華房 (1986).

[14] 佐竹一郎 : 数学選書 1　線形代数学, 裳華房 (1974).

[15] 弘瀬高浩 : トーリック多様体とニュートン図形を用いた空間曲面の描画法, 兵庫教育大学修士論文 (2003).

[16] 松坂和夫 : 集合・位相入門, 岩波書店 (1968).

[17] 吉永悦男・福井敏純・泉脩蔵 : 解析関数と特異点 第 1 部「特異点とニュートン図形」, 特異点の数理 **3**, 共立出版株式会社 (2002).